

<36637673530011

S

<36637673530011

Bayer. Staatsbibliothek

had. 49^{pc} (A) 46

**СБОРНИКЪ
УЧЕНЫХЪ СТАТЕЙ,**

НАПИСАННЫХЪ

ПРОФЕССОРАМИ

**ИМПЕРАТОРСКАГО
КАЗАНСКАГО УНИВЕРСИТЕТА,**

ВЪ ПАМЯТЬ

ПЯТИДЕСЯТИЛѢТНЯГО ЕГО СУЩЕСТВОВАНІЯ.

ТОМЪ ПЕРВЫЙ.

85

Acad. 49^{pc} (1)

**СБОРНИКЪ
УЧЕНЫХЪ СТАТЕЙ,**

НАПИСАННЫХЪ

ПРОФЕССОРАМИ

**ИМПЕРАТОРСКАГО
КАЗАНСКАГО УНИВЕРСИТЕТА,**

ВЪ ПАМЯТЬ

ПЯТИДЕСЯТИЛѢТНЯГО ЕГО СУЩЕСТВОВАНІЯ.

—
ТОМЪ ПЕРВЫЙ.

КАЗАНЬ.

1856.

Q

Печатаиъ по опредѣленію Совѣта Императорскаго Казанскаго Универси-
тета 12 Ноября 1854 года.

Секретарь Совѣта *В. Оковъ.*

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Печатано въ Университетской Типографіи.

Fg 188/50192

ОГЛАВЛЕНІЕ СТАТЕЙ 1-го ТОМА.

	Стан.
1. Основаніе варіаціоннаго исчисленія О. Профессора А. Попова...	1.
2. Recherches sur les mouvements de Neptune suivies des tables de cette planète par le Professeur M. Kowalski	97.
3. Pangéométrie ou précis de géométrie fondée sur une théorie générale et rigoureuse des parallèles par le Professeur émérite N. Lobatcheffsky	277.
4. О затмѣніяхъ О. Профессора М. Ковальскаго	341.

1. Océanographie expérimentale de l'océanographie A. Monod	1
2. Recherches sur les mouvements de l'épave suite des tables de	
cette planche par le Professeur M. Rosier	97
3. Pangeographie ou précis de géométrie fondée sur une théorie	
générale et rigoureuse des parallèles par le Professeur Gervais	
4. L'océanographie	217
5. Océanographie M. Rosier	341

I.

ОСНОВАНІЯ

ВАРІАЦІОННАГО ИСЧИСЛЕНІЯ

ИЗЪ ЛЕКЦІЙ

ОРДИНАРНАГО ПРОФЕССОРА

А. ПОПОВА.

1.

ОСНОВАНИИ

ВАРИАЦИОННАТО ИСЧИСЛЕНИЕ

ИЗЪЯВЛЕНИЕ

ОБЪЯВЛЕНИЕ

А. ПОПОВА.

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Издавая это сочиненіе, я имѣлъ усердіе представить вниманію просвѣщенной публики образецъ преподаванія математики въ Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ. Варіаціонное вычисленіе преподается студентамъ четвертаго курса въ теченіи втораго учебнаго семестра. Трудъ мой заключался собственно въ томъ, чтобы изложить всякую лекцію ясно и не спѣшно. При такомъ преподаваніи, молодые люди записываютъ самыя выраженія профессора, и съ удовольствіемъ составляютъ лекціи; мнѣ оставалось для печатанія сжать изложеніе живаго слова и раздѣлить курсъ на естественныя главы. Я не почелъ за необходимое пред-

ставить въ особенной главѣ исторію варіаціоннаго вычисленія, потому что въ этой исторіи нѣтъ спорныхъ предметовъ. Самъ Эйлеръ призналъ Лагранжа изобрѣтателемъ варіаціоннаго способа и содѣйствовалъ развитію новаго вычисленія. Пуассонъ и Остроградскій дополнили Лагранжеву теорію варіированіемъ въ кратныхъ интегралахъ; Лежандръ и Якоби въ задачѣ de maximis et minimis. Сарюсъ замѣчательнымъ образомъ представилъ сближеніе способа варіаціоннаго съ обыкновеннымъ измѣненіемъ произвольныхъ постоянныхъ въ опредѣленныхъ интегралахъ.

Всѣмъ извѣстно, что теоретическая астрономія составляетъ обширную задачу въ аналитической механикѣ, которую въ основаніи можно разсматривать какъ частную задачу въ теоріи de maximis et minimis. И такъ варіаціонное исчисленіе, по общности своихъ началъ, составляетъ самую изящную часть математическаго анализа. Оно предполагаетъ какъ бы извѣстнымъ интегрированіе всякаго дифференціальнаго уравненія и рѣшеніе всякаго алгебраическаго или трансцендентнаго уравненія.

Обыкновенный дифференціальный способ сравниваетъ только значенія всякой данной функціи; между тѣмъ какъ варіаціонный способъ сравниваетъ различныя функціи между собою, и опредѣляетъ ту изъ нихъ, которая удовлетворяетъ даннымъ условіямъ самымъ выгоднымъ образомъ. Съ этой точки взгляда, варіаціонное исчисленіе представляется какъ теорія математической экономіи. Если въ условіяхъ задачи нѣкоторыя величины даются приближенно, на примѣръ изъ наблюденій, въ такомъ случаѣ варіаціонный способъ переходитъ въ теорію вѣроятностей и опредѣляетъ элементы съ наименьшими погрѣшностями. Начальная геометрія, съ помощію дифференціальнаго способа, переходитъ въ высшую геометрію, въ общую теорію кривыхъ линій и поверхностей, и развивается поступательно, сохраняя строго въ своемъ ученіи первоначальныя опредѣленія прямой линіи, плоскости, сферы, параллельныхъ линій и пр. Варіаціонное вычисленіе, исходя отъ высшей теоріи приходитъ къ начальнымъ положеніямъ геометріи, доказываетъ кратчайшую длину прямой на плоскости, также дуги

большаго круга на сферѣ, наибольшую вѣсти-
мость шара и пр. Такимъ образомъ соприкасаются
начало и конецъ геометрическаго ученія, наука
замыкается такимъ образомъ, что не остается вхо-
да вопросу о достовѣрности самыхъ началъ. Всѣ
части геометріи равно достовѣрны, каждая тео-
рема можетъ служить какъ начальное опредѣле-
ніе, изъ котораго рядъ слѣдствій составитъ ту же
геометрію, только въ новомъ порядкѣ предложеній.

ОСНОВАНІЯ

ВАРІАЦІОННАГО ИСЧИСЛЕНІЯ.

Задачи математическаго анализа разрѣшаемыя непосредственно по способамъ интегральнаго вычисленія выражаются сначала дифференціальными уравненіями. Чтобы составить такое уравненіе, измѣняютъ независимое перемѣнное x на бесконечно малое количество dx , и пользуясь какимъ нибудь даннымъ свойствомъ неизвѣстной функціи $f(x)$, выражаютъ аналитическое отношеніе между x , $f(x)$ и $d.f(x)$.

Есть задачи другаго рода, для рѣшенія которыхъ необходимо измѣнять произвольное постоянное, входящее въ составъ неизвѣстной функціи. Такъ, дифференцированіе подъ знакомъ опредѣленнаго интеграла, въ отношеніи произвольной постоянной, приводитъ не рѣдко къ значенію самаго интеграла. Переходъ отъ частнаго интеграла къ общему, при интегрированіи линейныхъ дифференціальныхъ уравненій, основывается также на способѣ измѣненій произвольныхъ постоянныхъ. Наконецъ въ математическомъ анализѣ есть рядъ задачъ, для рѣшенія которыхъ способъ бесконечно малыхъ измѣненій употребляется особеннымъ образомъ: измѣняютъ самый видъ функціи и сравниваютъ приращенія. Этотъ рядъ задачъ составляетъ предметъ Варіаціоннаго

вычисленія. Мы покажемъ сначала на нѣкоторыхъ примѣрахъ природу и пріемъ варіаціоннаго способа, а потомъ изложимъ общую теорію варіаціоновъ.

§ I.

Выведемъ условія или признаки, по которымъ бы можно было узнать, что дифференціальное уравненіе n порядка, вида

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0,$$

есть точный и непосредственный дифференціалъ другаго уравненія.

Эйлеръ нашелъ, что таковая функція F должна удовлетворить условію

$$F'(y) - \frac{d \cdot F'(y')}{dx} + \frac{d^2 \cdot F'(y'')}{dx^2} - \dots \pm \frac{d^n \cdot F'(y^n)}{dx^n} = 0,$$

гдѣ означаемъ по Лагранжу

$$y' = \frac{dy}{dx}, y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \dots F'(y) = \frac{dF}{dy}, F'(y'') = \frac{dF}{dy''}, \dots$$

Пуассонъ прибавилъ, что условіе Эйлера не только необходимо, но и достаточно для интегрированія функція F . Чтобы доказать эту важную теорему интегральнаго вычисленія, означимъ нашу функцію выраженіемъ

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^n),$$

или просто буквою F , и замѣтимъ, что каково бы ни было отношеніе между y и x , всегда можно полагать

$$y = u + \alpha v,$$

разсматривая u и v неопредѣленными функціями и α неопредѣленнымъ постояннымъ. Мы получимъ

$$y' = u' + \alpha v', \quad y'' = u'' + \alpha v'', \quad \dots \quad y^n = u^n + \alpha v^n,$$

и съ тѣмъ вмѣстѣ

$$F(x, u + \alpha v, u' + \alpha v', \dots, u^n + \alpha v^n).$$

Но такое выраженіе функція F можно разсматривать какъ функцію произвольной постоянной α , на примѣръ какъ $f(\alpha)$; затѣмъ можно α измѣнить на бесконечно малое количество и взять разность значеній $f(\alpha)$; но такимъ образомъ получимъ

$$df(\alpha) = d\alpha [v F'(\alpha v) + v' F'(\alpha v') + \dots v^n F'(\alpha v^n)],$$

означая чрезъ $F'(\alpha v)$, $F'(\alpha v')$, ... производныя отъ функціи F взятые въ отношеніи количествъ $u + \alpha v$, $u' + \alpha v'$, ...

Если интегрируемъ это уравненіе между границами $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$, то будетъ

$$f(1) - f(0) = \int_0^1 d\alpha [v F'(\alpha v) + v' F'(\alpha v') + \dots v^n F'(\alpha v^n)]$$

Но мы знаемъ что,

$$f(1) = F(x, u + v, u' + v', \dots u^n + v^n)$$

$$f(0) = F(x, u, u', \dots u^n),$$

слѣдовательно будетъ

$$F(x, u + v, u' + v', \dots u^n + v^n) = F(x, u, u', \dots u^n)$$

$$+ \int_0^1 d\alpha [v F'(\alpha v) + v' F'(\alpha v') + \dots v^n F'(\alpha v^n)].$$

Эта формула предполагаетъ функціи $F'(\alpha v)$, $F'(\alpha v')$, ... $F'(\alpha v^n)$ конечными и непрерывными въ отношеніи α , между границами $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$, а съ такимъ условіемъ можно интегрировать обѣ части уравненія въ отношеніи x и перемѣнить въ послѣднемъ членѣ порядокъ дѣйствій по α и x , то есть получимъ

$$\int dx F(x, u + v, u' + v', \dots u^n + v^n) = \int dx F(x, u, u', \dots u^n)$$

$$+ \int_0^1 d\alpha \int dx [v F'(\alpha v) + v' F'(\alpha v') + \dots v^n F'(\alpha v^n)]$$

и какъ здѣсь интегрированіе по частямъ даетъ

$$\int dx v' F'(\alpha v') = \int F'(\alpha v') dv' = v F'(\alpha v') - \int v dx \frac{dF'(\alpha v')}{dx},$$

$$\int dx v'' F'(\alpha v'') = \int F'(\alpha v'') dv'' = v' F'(\alpha v'') - v \frac{dF'(\alpha v'')}{dx}$$

$$+ \int v dx \frac{d^2 F'(\alpha v'')}{dx^2},$$

$$\int dx v''' F'(\alpha v''') = \int F'(\alpha v''') dv''' = v'' F'(\alpha v''') - v' \frac{dF'(\alpha v''')}{dx}$$

$$+ v \frac{d^2 F'(\alpha v''')}{dx^2} - \int v dx \frac{d^3 F'(\alpha v''')}{dx^3}, \dots$$

$$\int dx v^n F'(\alpha v^n) = \int F'(\alpha v^n) dv^n = v^{n-1} F'(\alpha v^n)$$

$$- v^{n-2} \frac{dF'(\alpha v^n)}{dx} + \dots \pm \int v dx \frac{d^n F'(\alpha v^n)}{dx^n},$$

то окончательно найдемъ

$$\begin{aligned} \int F(x, u + v, u' + v', \dots, u^n + v^n) dx &= \int F(x, u, u', \dots, u^n) dx \\ &+ \int_0^1 d\alpha \int v dx \left[F'(\alpha v) - \frac{d. F'(\alpha v')}{dx} + \frac{d.^2 F'(\alpha v'')}{dx^2} \dots \pm \frac{d.^n F'(\alpha v^n)}{dx^n} \right] \\ &+ v \int_0^1 d\alpha \left[F'(\alpha v') - \frac{d. F'(\alpha v'')}{dx} + \dots \pm \frac{d^{n-1} F'(\alpha v^n)}{dx^{n-1}} \right] \\ &+ v' \int_0^1 d\alpha \left[F'(\alpha v'') - \frac{d. F'(\alpha v''')}{dx} + \dots \pm \frac{d^{n-2} F'(\alpha v^n)}{dx^{n-2}} \right] \\ &+ \dots + v^{n-1} \int_0^1 F'(\alpha v^n) d\alpha \end{aligned}$$

Въ этомъ уравненіи функціи u, v, F не имѣютъ какаго нибудь опредѣленнаго значенія. Но если полагаемъ $u = 0, u' = 0, \dots$ и слѣдственно $v = y, v' = y', \dots$; и если функцію F подчиняемъ Эйлерову условію

$$F'(y) - \frac{d. F'(y')}{dx} + \frac{d.^2 F'(y'')}{dx^2} - \dots \pm \frac{d.^n F'(y^n)}{dx^n} = 0,$$

то получимъ формулу Пуассона:

$$\begin{aligned} \int F(x, y, y', \dots, y^n) dx &= \int F(x, 0, 0, \dots, 0) dx \\ &+ y \int_0^1 \left[F'(\alpha v') - \frac{d. F'(\alpha v'')}{dx} + \dots \pm \frac{d^{n-1} F'(\alpha v^n)}{dx^{n-1}} \right] d\alpha \\ &+ y' \int_0^1 \left[F'(\alpha v'') \dots \mp \frac{d^{n-2} F'(\alpha v^n)}{dx^{n-2}} \right] d\alpha + \dots + y^{n-1} \int_0^1 F'(\alpha v^n) d\alpha, \end{aligned}$$

гдѣ по интегрированіи въ отношеніи α должно вставить $y, y', y'', \dots$ на мѣсто $v, v', v'', \dots, v^n$. Должно замѣтить, что предъидущая формула общиѣ Пуассоновой, потому что послѣдняя перестаетъ служить въ тѣхъ случаяхъ, когда формула $F'(x, 0, 0, \dots, 0)$ получаетъ безконечное или неопредѣленное значеніе. Обѣ формулы приводятъ интегрированіе уравненій

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^n) = 0$$

къ обыкновенному интегрированію функцій съ одною переменною.

Докажемъ теперь, что если функція F будетъ точная производная другой функціи φ , то есть

$$F(x, y, y', \dots, y^n) dx = d. \varphi(x, y, y', \dots, y^{n-1}),$$

то условіе

$$F'(y) - \frac{d. F'(y')}{d x} + \frac{d^2 F'(y'')}{d x^2} - \dots \pm \frac{d^n F'(y^n)}{d x^n} = 0$$

непремѣнно будетъ удовлетворено.

Поставимъ въ предъидущее уравненіе $y + \alpha v$ на мѣсто y , предполагая α переменнымъ независимымъ отъ x , и v нѣкоторою функціею отъ x ; будетъ

$$F(x, y + \alpha v, y' + \alpha v', \dots, y^n + \alpha v^n) dx = d. \varphi(x, y + \alpha v, \dots, y^{n-1} + \alpha v^{n-1})$$

Если дифференцируемъ это уравненіе въ отношеніи α , замѣчая что

$$\frac{d.}{d \alpha} \left(\frac{d \varphi}{d x} \right) = \frac{d.}{d x} \left(\frac{d \varphi}{d \alpha} \right),$$

то получимъ

$$v F'(y + \alpha v) + v' F'(y' + \alpha v') + \dots + v^n F'(y^n + \alpha v^n) = \frac{d.}{d x} [v \varphi'(y + \alpha v) + v' \varphi'(y' + \alpha v') + \dots + v^{n-1} F'(y^{n-1} + \alpha v^{n-1})],$$

гдѣ производныя функціи имѣютъ по прежнему сокращенное означеніе. Полагая $\alpha = 0$, будетъ

$$v F'(y) + v' F'(y') + \dots + v^n F'(y^n) = \frac{d.}{d x} [v \varphi'(y) + v' \varphi'(y') + \dots + v^{n-1} \varphi'(y^n)],$$

откуда заключаемъ, что сумма

$$v F'(y) + v' F'(y') + \dots + v^n F'(y^n)$$

должна быть точною производною функціею. Но въ этой суммѣ находятся члены, которые сами по себѣ представляютъ точную производную; отдѣливъ ихъ, должно остальную часть уравнять нулю. Въ самомъ дѣлѣ,

$$v' F'(y') = \frac{d.}{d x} \int F'(y') dv = \frac{d.}{d x} [v F'(y')] - v \frac{d.}{d x} F'(y'),$$

$$v'' F'(y'') = \frac{d.}{d x} \int F'(y'') dv' = \frac{d.}{d x} [v' F'(y'') - v \frac{d.}{d x} F'(y'')] + v \frac{d^2}{d x^2} F'(y''),$$

и такъ далѣе; слѣдовательно по предъидущему условію получимъ

$$F'(y) - \frac{d.}{d x} F'(y') + \frac{d^2}{d x^2} F'(y'') - \dots \pm \frac{d^n}{d x^n} F'(y^n) = 0$$

Пусть для примѣра

$$F dx = M dx + N dy = (M + y' N) dx,$$

разсматривая M и N данными функциями отъ x и y .

По условію интегрируемости будетъ

$$F'(y) - \frac{d}{dx} F'(y') = 0,$$

что даетъ

$$\frac{dM}{dy} + y' \frac{dN}{dy} - \frac{dN}{dx} - y' \frac{dN}{dy} = 0,$$

или по сокращеніи $\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx} = 0$.

Но мы знаемъ, что интегрируемость уравненія

$$M dx + N dy = 0$$

дѣйствительно зависитъ отъ предыдущаго условія.

§ II.

Если вникнемъ въ самый пріемъ употребленный для рѣшенія предыдущей задачи, то замѣтимъ что рѣшеніе основывается на измѣненіи функции y въ другую $y + \alpha v$, или, что все равно, на измѣненіи самага вида функции y . Такого рода приращенія функций существенно отличны отъ дифференціальнахъ, которыя происходятъ въ слѣдствіе приращенія независимой переменнѣй величины.

Чтобы представить способъ въ видѣ болѣе общемъ, выведемъ условія интегрируемости функции

$$F(x, y, y', y'', \dots y^n; z, z', z'', \dots z^m)$$

содержащей переменное x , двѣ функции y и z , съ ихъ производными

$$y' = \frac{dy}{dx}, y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}, \dots y^n = \frac{d^n y}{dx^n};$$

$$z' = \frac{dz}{dx}, z'' = \frac{d^2 z}{dx^2}, \dots z^m = \frac{d^m z}{dx^m}.$$

Поставимъ въ выраженіе F , $u + \alpha v$ на мѣсто y и въ то же время $p + \alpha q$ на мѣсто z , разсматривая u, v, p, q какъ неопредѣленныя функции отъ x , и α какъ переменное независимое

отъ x . За тѣмъ, рассматривая выраженіе F какъ функцію переменнаго α , дифференцируемъ эту функцію и потомъ интегрируемъ между границами $\alpha = 0, \alpha = 1$; будетъ

$$\begin{aligned} & F(x, u + v, u' + v', \dots u^n + v^n; p + q, p' + q', \dots p^m + q^m) \\ & - F(x, u, u', \dots u^n; p, p', p'', \dots p^m) = \\ & \int_0^1 d\alpha [v F'(\alpha v) + v' F'(\alpha v') + v'' F'(\alpha v'') + \dots + v^n F'(\alpha v^n)] \\ & + \int_0^1 d\alpha [q F'(\alpha q) + q' F'(\alpha q') + q'' F'(\alpha q'') \dots + q^m F'(\alpha q^m)], \end{aligned}$$

гдѣ $F'(\alpha v), F'(\alpha v') \dots F'(\alpha q), F'(\alpha q') \dots$ означаютъ производныя функціи отъ F взятые въ отношеніи количествъ $u + \alpha v, u' + \alpha v', \dots p + \alpha q, p' + \alpha q', \dots p^m + \alpha q^m$.

Если интегрируемъ предъидущее уравненіе, по умноженіи на dx , то получимъ

$$\begin{aligned} & \int F(x, u + v, u' + v', \dots u^n + v^n; p + q, p' + q', p^m + q^m) dx \\ & = \int F(x, u, u', \dots u^n; p, p', \dots p^m) dx \\ & + \int_0^1 d\alpha \int dx [v F'(\alpha v) + v' F'(\alpha v') + \dots v^n F'(\alpha v^n)] \\ & + \int_0^1 d\alpha \int dx [q F'(\alpha q) + q' F'(\alpha q') + \dots q^m F'(\alpha q^m)], \end{aligned}$$

и если интегрируемъ по частямъ члены

$$\int F'(\alpha v') v' dx, \dots \int F'(\alpha v^n) v^n dx; \int F'(\alpha q') q' dx, \dots \int F'(\alpha q^m) q^m dx$$

то найдемъ

$$\begin{aligned} & \int F(x, u + v, u' + v', \dots p + q, p' + q', \dots) dx \\ & = \int F(x, u, u', \dots; p, p', \dots) dx + P + Q \\ & + \int_0^1 d\alpha \int v dx \left[F'(\alpha v) - \frac{d}{dx} F'(\alpha v') + \frac{d^2}{dx^2} F'(\alpha v'') \dots \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. \pm \frac{d^n}{dx^n} F'(\alpha v^n) \right] \\ & + \int_0^1 d\alpha \int q dx \left[F'(\alpha q) - \frac{d}{dx} F'(\alpha q') + \frac{d^2}{dx^2} F'(\alpha q'') \dots \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. \pm \frac{d^m}{dx^m} F'(\alpha q^m) \right] \end{aligned}$$

полагая для сокращенія

$$P = v \int_0^1 d\alpha \left[F'(\alpha v') - \frac{d}{dx} F'(\alpha v'') + \dots \pm \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} F'(\alpha v^n) \right] \\ + v' \int_0^1 d\alpha \left[F'(\alpha v'') - \frac{d}{dx} F'(\alpha v''') + \dots \pm \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} F'(\alpha v^n) \right] \\ + \dots + v^{n-1} \int_0^1 F'(\alpha v^n) d\alpha$$

$$Q = q \int_0^1 d\alpha \left[F'(\alpha q') - \frac{d}{dx} F'(\alpha q'') \dots \pm \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} F'(\alpha q^m) \right] \\ + q' \int_0^1 d\alpha \left[F'(\alpha q'') - \frac{d}{dx} F'(\alpha q''') \dots \pm \frac{d^{m-2}}{dx^{m-2}} F'(\alpha q^m) \right] \\ + \dots + q^{m-1} \int_0^1 F'(\alpha q^m) d\alpha$$

Положимъ теперь, что функція $F(x, y, y', y'', \dots; z, z', z'', \dots)$ удовлетворяетъ вдругъ двумъ условіямъ

$$F'(y) - \frac{d}{dx} F'(y') + \frac{d^2}{dx^2} F'(y'') - \dots \pm \frac{d^n}{dx^n} F'(y^n) = 0, \\ F'(z) - \frac{d}{dx} F'(z') + \frac{d^2}{dx^2} F'(z'') - \dots \pm \frac{d^m}{dx^m} F'(z^m) = 0;$$

тогда по предъидущему уравненію будетъ

$$\int F(x, u + v, u' + v', \dots; p + q, p' + q', \dots) dx = \\ \int F(x, u, u', \dots; p, p', \dots) dx + P + Q$$

и если вмѣсто функцій u и p возьмемъ постоянныя величины, полагая $u = a, p = b$, то будетъ

$$v = y - a, q = z - b, \\ u' = 0, u'' = 0, \dots p' = 0, p'' = 0 \\ v' = y', v'' = y'', \dots q' = z', q'' = z'', \dots$$

и слѣдственно

$$\int F(x, y, y', \dots; z, z', z'', \dots) dx = \int F(x, a, 0, \dots b, 0, 0 \dots) dx \\ + P + Q.$$

Но P и Q не содержатъ интегрированія въ отношеніи переменной x , слѣдовательно интегрированіе формулы

$$\int F(x, y, y', \dots; z, z', \dots) dx$$

приводится къ обыкновенному интегралу функціи съ одною переменною, то есть

$$\int F(x, a, o, o \dots; b, o, o \dots) dx$$

Если, вмѣсто того чтобы предполагать u и p постоянными величинами, оставимъ ихъ произвольными функціями, и сдѣлаемъ при томъ $v = y - u$, $q = z - p$, то получимъ

$$\int F(x, y, y', \dots, z, z', \dots) dx = \int F(x, u, u', \dots, p, p', \dots) dx + P + Q$$

Эту весьма замѣчательную формулу можно распространить на какое угодно число функцій $y, z, \dots$

Найдемъ для примѣра условіе интегрируемости уравненія

$$M dx + N dy + P dz = 0,$$

въ которомъ M, N, P данныя функціи отъ x, y, z .

Но въ этомъ случаѣ будетъ

$$F = M + y' N + z' P,$$

слѣдовательно по условіямъ интегрируемости

$$\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx} + z' \left(\frac{dP}{dy} - \frac{dN}{dz} \right) = 0$$

$$\frac{dM}{dz} - \frac{dP}{dx} + y' \left(\frac{dN}{dz} - \frac{dP}{dy} \right) = 0$$

откуда получимъ три уравненія

$$\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx} = 0, \quad \frac{dM}{dz} - \frac{dP}{dx} = 0, \quad \frac{dN}{dz} - \frac{dP}{dy} = 0,$$

или одно слѣдующее

$$P \left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx} \right) + N \left(\frac{dP}{dx} - \frac{dM}{dz} \right) + M \left(\frac{dN}{dz} - \frac{dP}{dy} \right) = 0,$$

что доказываютъ и по другому способу въ интегральномъ вычисленіи.

§ III.

Между двумя перпендикулярами къ третьей прямой линіи, провести кривую, такого свойства, чтобы произведеніе перпендикуляровъ отслѣченныхъ касательною къ той кривой было постоянно для всѣхъ точекъ кривой?

Относимъ искомую кривую къ прямоугольнымъ осямъ координатъ X, Y параллельнымъ даннымъ перпендикулярамъ и основанію ихъ. Пусть будутъ x, y координаты точки m прикоснове-

нія прямой $N' M'$, отръзки перпендикуляровъ означимъ $M M' = m'$, $N N' = n'$; условіе задачи выразится

$$n' m' = \text{Const.} = C$$

Но если означимъ m и n абсциссы точекъ M' и N' и положимъ

$$\frac{dy}{dx} = y', \text{ то получимъ}$$

$$m' = y + (m - x) y'$$

$$n' = y + (n - x) y'$$

и слѣдовательно по предъидущему условію

$$(1) \quad [y + (m - x) y'] [y + (n - x) y'] = C.$$

Дифференцируя это уравненіе въ отношеніи x и также y, y' , какъ функцій отъ x , будетъ

$$y'' (m - x) [y + (n - x) y'] + y'' (n - x) [y + (m - x) y'] = 0,$$

чему можно удовлетворить, полагая

$$(2) \quad y'' = 0 \text{ или } (m - x) [y + (n - x) y'] + (n - x) [y + (m - x) y'] = 0.$$

Если интегрируемъ уравненіе $y'' = 0$, то получимъ

$$y = Ax + B,$$

означая чрезъ A и B произвольныя постоянныя.

Итакъ прямая линія удовлетворяетъ требуемому условію задачи, что весьма естественно, потому что прямая сливается съ своею постоянною касательною, и произведеніе отръзковъ будетъ постоянно.

Если возьмемъ первый интеграль уравненія $y'' = 0$, то есть $y' = A$ и поставимъ это значеніе въ уравненіе (1), то получимъ

$$(y - Ax)^2 + (y - Ax)(An + Am) + mnA^2 = C,$$

откуда снова имѣемъ

$$y = Ax + B$$

Но если возьмемъ второе уравненіе (2) и значеніе y' , то есть

$$(3) \quad y' = \frac{2x - m - n}{(m - x)(n - x)} \cdot \frac{y}{2},$$

вставимъ въ уравненіе (1), то будетъ

$$y^2 \left(1 + \frac{2x - m - n}{2(n - x)} \right) \left(1 + \frac{2x - m - n}{2(m - x)} \right) = C,$$

откуда получаемъ

$$y^2 + \frac{4C(m-x)(n-x)}{(m-n)^2} = 0 \quad (4)$$

Итакъ, по второму рѣшенію, условію задачи удовлетворяютъ эллипсъ и гипербола, смотря потому будетъ ли C положительная или отрицательная величина. Замѣчательно, что этого рѣшенія можно достигнуть еще другимъ путемъ, непосредственно изъ уравненія (3). Въ самомъ дѣлѣ, напомнимъ это уравненіе подъ видомъ

$$\frac{dy}{y} = \frac{(2x - m - n) dx}{2(m-x)(n-x)},$$

или разбивая на частныя дроби

$$\frac{dy}{y} = \frac{1}{2} \frac{dx}{x-m} + \frac{1}{2} \frac{dx}{x-n},$$

отсюда по интегрированіи получимъ

$$y^2 = C_1 (x-m)(x-n),$$

что и будетъ тождественно съ уравненіемъ (4), если дѣлаемъ

$$-C_1 = \frac{4C}{(m-n)^2}$$

Положеніе кривыхъ совершенно опредѣляется уравненіемъ (4).

Случай $C > 0$ принадлежитъ эллипсу. Изъ уравненія (4) имѣемъ

$$y = 0 \text{ при } x = m \text{ и } x = n;$$

а если вставимъ въ (3) значеніе y изъ (4), то получимъ

$$\frac{dy}{dx} = \infty \text{ при } x = m \text{ и } x = n,$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \text{ при } x = \frac{m+n}{2}.$$

Это значитъ, эллипсъ помѣщается между данными перпендикулярами NN' , MM' , имѣя вершины одной изъ осей своихъ въ точкахъ N и M .

Случай $C < 0$ принадлежитъ гиперболѣ. Значенія y воображаемы внутри предѣловъ $x > n$ и $x < m$; и по прежнему

$$\frac{dy}{dx} = \infty \text{ при } x = m, x = n.$$

Вершины дѣйствительной оси гиперболы лежатъ въ точкахъ M и N .

Не трудно видѣть, что рѣшеніе

$$y = Ax + B$$

есть общій интеграль уравненія

$$y''(m-x)[y+(n-x)y'] + y''(n-x)[y+(m-x)y'] = 0,$$

между тѣмъ какъ

$$y^2 = C_1(x-m)(x-n)$$

представляетъ особенное рѣшеніе того же уравненія, но мы не будемъ останавливаться на этомъ замѣчаніи.

Полный дифференціалъ уравненія (1) имѣетъ такой видъ какъ бы дифференцирование относилось только къ величинѣ y' . Это обстоятельство случайно въ смыслѣ общаго дифференціального способа, но въ способѣ варіаціонномъ составляетъ самую сущность. Въ самомъ дѣлѣ, рѣшая предыдущую задачу, мы утверждаемся на какой нибудь точкѣ кривой (x, y) и сообразно вопросу измѣняемъ положеніе касательной линіи, то есть величину y' .

Положимъ, что произведеніе отрѣзковъ на перпендикулярахъ касательною, вмѣсто постояннаго, должно быть максимум или минимум. Но теперь ясно, что по самой сущности задачи должно полагать

$$\frac{dM}{dy'} = 0, \text{ дѣлая } M = [y + (m-x)y'] [y + (n-x)y'].$$

Такимъ образомъ получимъ извѣстное уже намъ уравненіе

$$(m-x)[y+(n-x)y'] + (n-x)[y+(m-x)y'] = 0,$$

И какъ въ случаѣ максимум должно быть

$$\frac{d^2 M}{d y'^2} = 2(m-x)(n-x) < 0,$$

таже величина должна быть положительна въ случаѣ минимум, то заключаемъ, что первому условію удовлетворяетъ кривая линія эллипсъ, въ которомъ

$$x > n, m > x;$$

второму же условію удовлетворяетъ гипербола, въ которой для обѣихъ полъ постоянно

$$(m-x)(n-x) > 0.$$

Эти свойства коническихъ сѣченій были открыты еще греческимъ Геометромъ Аполлоніемъ; мы изложили аналитическое доказательство Лагранжа, которому принадлежитъ то преимуще-

ство, что коническія сѣченія представляются какъ единственныя кривыя, которымъ принадлежитъ свойство предложенное въ задачѣ.

ТЕОРІЯ ВАРІАЦІОНОВЪ.

§ IV.

Величина x называется независимою переменною, если она можетъ проходить рядъ послѣдовательныхъ значеній, то есть измѣняться въ $x + \Delta x$, гдѣ Δx есть величина произвольная, которая можетъ быть велика или мала какъ угодно. Величина Δx вообще называется приращеніемъ переменнѣй x , и когда это приращеніе предполагается бесконечно малымъ, то его называютъ дифференціаломъ и означаютъ чрезъ dx . Бесконечно малое приращеніе неизмѣняетъ численнаго значенія величины x , а только даетъ знать, что x способно измѣняться; слѣдовательно знакъ d поставленный предъ независимымъ переменнымъ x не требуетъ ни какаго аналитическаго дѣйствія, а представляетъ только символъ переменнѣй величины. Если d должно служить къ уменьшенію x , тогда прибавляютъ впереди знакъ минусъ и пишутъ $-dx$.

Совсѣмъ иначе должно разсматривать приращеніе функцій. Если дана, на примѣръ $y = f(x)$, то функція y измѣняется въ слѣдствіе приращенія независимой переменнѣй x , то есть

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x),$$

и если Δx бесконечно мало, то пишутъ

$$dy = f'(x) dx$$

Знакъ d поставленный предъ y требуетъ того аналитическаго дѣйствія, по которому вычисляется функція $f'(x)$, то есть

$$f'(x) = \lim. \left[\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right],$$

между тѣмъ какъ dx остается произвольною величиною, только въ порядкѣ бесконечно малыхъ.

Общее понятіе объ аналитической зависимости представляетъ еще другой способъ измѣнить значеніе данной функціи $f(x)$, а именно: измѣнить самую зависимость между y и x , то есть выбирая новую функцію F вмѣсто f . Если измѣненіе или приращеніе такого рода предполагается бесконечно малымъ, то его называютъ *вариациономъ*, выражаютъ знакомъ δ и пишутъ

$$\delta y = F(x) - f(x)$$

Вариационъ данной функціи можно получить различнымъ образомъ: можно обратить нѣкоторыя постоянныя величины въ переменныя, умножить данную функцію на другую произвольную, придать къ данной функціи другую произвольную; но разность функцій измѣненной съ первоначальною должна быть всегда мала.

Поясимъ это примѣромъ: пусть данъ эллипсъ уравненіемъ

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Если поставить сюда $b + \Delta b$ намѣсто b , то перейдемъ къ другому эллипсу, въ которомъ ось b длиннѣе прежней на величину Δb . Приращеніе Δb можно еще разсматривать какъ нѣкоторую функцію $\omega(x)$, тогда мы переходимъ отъ даннаго эллипса къ другой кривой линіи, которой уравненіе будетъ

$$Y = \frac{b + \omega(x)}{a} \sqrt{a^2 - x^2},$$

за тѣмъ, полагая $\omega(x)$ бесконечно малымъ, получимъ

$$\delta y = \frac{\omega(x)}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

Если умножимъ радикалъ въ уравненіи эллипса на функцію показательную $e^{-\beta x}$ и придадимъ произвольную функцію $\omega(x)$, предполагая постоянное β и функцію $\omega(x)$ бесконечно малыми, то получимъ другое выраженіе вариациона:

$$\delta y = e^{-\beta x} \cdot \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} + \omega(x) - y$$

Но различные способы ведущіе къ вариационному измѣненію функцій можно подвести подъ общій взглядъ, разсматривая данную функцію $f(x)$ какъ предѣлъ другой произвольной функціи $F(x, t)$, въ которой полагаетъ $t = 0$. Вспомогательное переменное t представляется здѣсь какъ причина, отъ которой зависятъ значенія функціи $F(x, t)$, и въ опредѣленный моментъ $t = 0$, даетъ

$$\lim. F(x, t) = f(x)$$

Если значеніе t не предполагается нулемъ, а только весьма малымъ, то будетъ

$$F(x, t) = F(x, 0) + t F'(x, \theta t), \text{ гдѣ } \theta < 1$$

И если полагаемъ

$$\lim. F(x, t) = F(x, 0) = f(x),$$

$$\lim. F'(x, \theta t) = F'(x, 0) = \omega(x)$$

то получимъ

$$\delta. f(x) = F(x, t) - f(x) = t \omega(x)$$

Но величина t , какъ независимая отъ x , можетъ быть опущена въ характеристикѣ функціи $F(x, t)$; также величина, умножая произвольную функцію $\omega(x)$, опредѣляетъ содержаніе въ которомъ значеніе $\omega(x)$ должно быть уменьшено, что можемъ подразумѣвать въ самой характеристикѣ функціи ω ; слѣдовательно можно написать предъидущее уравненіе въ слѣдующемъ видѣ:

$$\delta. f(x) = F(x) - f(x) = \omega(x)$$

Итакъ *варіаціонъ функціи есть бесконечно малая разность произвольной функціи съ данною.*

§ V.

Варіаціонное вычисленіе основывается на нѣкоторыхъ теоремахъ, которыми пользуются во всякой частной задачѣ.

1. *Варіаціонъ отъ суммы функцій равенъ суммѣ варіаціоновъ отъ каждой функціи порознь.*

Для доказательства этой теоремы положимъ

$$y = \lim. F(x, t), \quad z = \lim. \Phi(x, t),$$

будетъ

$$\begin{aligned} \delta(y + z) &= [F(x, t) + \Phi(x, t)] - (y + z) \\ &= [F(x) - y] + [\Phi(x) - z] \end{aligned}$$

Но по опредѣленію нашему

$$F(x) - y = \delta y, \quad \Phi(x) - z = \delta z,$$

слѣдовательно получимъ

$$\delta(y + z) = \delta y + \delta z.$$

2. *Варіаціонъ отъ произведенія функцій равенъ дифференціалу отъ того же произведенія, съ перемѣною знака d на δ .*

Въ самомъ дѣлѣ,

$$\delta. yz = \lim. [(y + \Delta y)(z + \Delta z) - yz],$$

гдѣ знакъ $\lim.$ требуетъ по окончаніи счета поставить знакъ δ на мѣсто знака Δ . Но какъ будетъ

$$\delta. yz = \lim. [y \Delta z + z \Delta y + \Delta y \Delta z],$$

то, пренебрегая величиною бесконечно малою втораго порядка $\delta y \delta z$, получимъ

$$\delta. yz = y \delta z + z \delta y.$$

3. *Варіаціонъ отъ полнаго дифференціала данной функціи равенъ полному дифференціалу отъ варіаціона той же функціи.*

При доказательствѣ этой теоремы будемъ различать варіаціоны собственный и приданный. Варіаціонъ будемъ называть *собственнымъ*, если онъ происходитъ въ слѣдствіе измѣненія самой функціи. Такъ, если дана функція $y = f(x)$, то собственный варіаціонъ будетъ $\delta y = F(x) - f(x) = \omega(x)$.

Если же въ данной функціи, $y = f(x)$, величину x будемъ разсматривать какъ нѣкоторую функцію $\varphi(t)$ новаго переменнаго t , то въ слѣдствіе собственного варіаціона δx произойдетъ *приданный* варіаціонъ δy , такъ что будетъ

$$\delta x = \Phi(t) - \varphi(t) = \omega(t),$$

$$\delta y = f(x + \delta x) - f(x) = f'(x) \cdot \delta x$$

Для варіаціона собственного теорема справедлива. Въ самомъ дѣлѣ, по опредѣленію имѣемъ

$$y = f(x), \delta y = F(x) - f(x) = \omega(x);$$

или, измѣнивъ x на $x + dx$,

$$y + dy = f(x + dx), \delta(y + dy) = \omega(x + dx).$$

Но

$$\delta(y + dy) = \delta y + \delta dy,$$

$$\omega(x + dx) = \omega(x) + \omega'(x) \cdot dx,$$

слѣдовательно будетъ

$$\delta y + \delta dy = \omega(x) + \omega'(x) \cdot dx$$

или еще $\delta dy = \omega'(x) dx = d \cdot \omega(x)$,

и наконецъ $\delta dy = d \delta y$.

Теорема доказывается подобнымъ образомъ для функцій со многими переменными. Пусть

$$u = f(x, y, z),$$

$$\delta u = F(x, y, z) - f(x, y, z) = \omega(x, y, z)$$

Измѣняя x, y, z въ $x + dx, y + dy, z + dz$, получимъ

$$u + du = f(x + dx, y + dy, z + dz),$$

$$\delta(u + du) = \omega(x + dx, y + dy, z + dz),$$

отсюда по разложеніи функціи ω въ строку Тайлера находимъ

$$\delta u + \delta du = \omega(x, y, z) + \omega'(x) dx + \omega'(y) dy + \omega'(z) dz,$$

$$\text{или } \delta du = d \cdot \omega(x, y, z),$$

и наконецъ $\delta du = d \delta u$.

Теорема справедлива также для вариационных приданныхъ. Возьмемъ $y = F(x)$ и положимъ, что переменное x способно имѣть собственный вариационъ δx , будетъ

$$dy = F(x + dx) - F(x) = F'(x) dx$$

$$\delta y = F(x + \delta x) - F(x) = F'(x) \delta x$$

Если первое уравненіе варируемъ, а второе дифференцируемъ, то получимъ

$$\delta dy = F'(x) \delta dx + dx F''(x) \delta x,$$

$$d\delta y = F'(x) d\delta x + \delta x F''(x) dx.$$

Но мы уже доказали, что $\delta dx = d\delta x$, слѣдовательно будетъ $d\delta y = \delta dy$.

Возьмемъ еще функцію со многими переменными. Пусть

$$u = F(x, y, z),$$

гдѣ переменныя x, y, z суть нѣкоторыя функціи новаго переменнаго t , и потому способны получить собственные вариационы $\delta x, \delta y, \delta z$; будетъ

$$\delta u = F(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z) - F(x, y, z)$$

Если разложимъ вторую часть уравненія въ строку Тайлера и напомнимъ также выраженіе полного дифференціала du , то получимъ

$$\delta u = F'(x) \delta x + F'(y) \delta y + F'(z) \delta z,$$

$$du = F'(x) dx + F'(y) dy + F'(z) dz.$$

Полный дифференціалъ функціи δu будетъ

$$\begin{aligned} d\delta u = & d\delta x \cdot F'(x) + \delta x \{ F''(xx) dx + F''(xy) dy + F''(xz) dz \} \\ & + d\delta y \cdot F'(y) + \delta y \{ F''(xy) dx + F''(yy) dy + F''(yz) dz \} \\ & + d\delta z \cdot F'(z) + \delta z \{ F''(zx) dx + F''(zy) dy + F''(zz) dz \} \end{aligned}$$

съ другой стороны, вариационъ отъ дифференціала du будетъ

$$\begin{aligned} \delta du = & \delta dx \cdot F'(x) + dx [F''(xx) \delta x + F''(xy) \delta y + F''(xz) \delta z] \\ & + \delta dy \cdot F'(y) + dy [F''(yx) \delta x + F''(yy) \delta y + F''(yz) \delta z] \\ & + \delta dz \cdot F'(z) + dz [F''(zx) \delta x + F''(zy) \delta y + F''(zz) \delta z] \end{aligned}$$

Сравнивая вторыя части уравненій почленно, и замѣчая что $d\delta x = \delta dx$, $d\delta y = \delta dy$, $d\delta z = \delta dz$, получимъ

$$d\delta u = \delta du.$$

Итакъ теорема справедлива во всѣхъ случаяхъ, когда du предполагается полнымъ дифференціаломъ. Для дифференціаловъ

высшихъ порядковъ не нужно новаго доказательства, а стоитъ только замѣтить, что

$$\delta. d^2 u = \delta d. du = d\delta. du = d^2. \delta u,$$

$$\delta. d^3 u = d^3. \delta u,$$

и вообще

$$\delta. d^n u = d^n. \delta u$$

4. Для частныхъ дифференціаловъ переменна порядка варіи-
рования съ дифференцированиемъ вообще неимѣетъ мѣста. На-
примѣръ, если u будетъ функція двухъ переменныхъ x, y , то
уравненіе

$$\delta. \left(\frac{d u}{d x} \right) d x = \left(\frac{d \delta u}{d x} \right) d x$$

не будетъ вообще справедливо.

Чтобы найти варіаціонъ отъ частнаго дифференціала данной
функціи $u = f(x, y)$, будемъ писать для сокращенія $d_x u$ вмѣсто
 $\left(\frac{d u}{d x} \right) d x$, чтобы имѣть

$$d_x u = f(x + d x, y) - f(x, y)$$

Если переменныя x, y получаютъ варіаціонныя приращенія δx ,
 δy , то будетъ

$$\delta d_x u = f(x + \delta x + d x + d_x \delta x, y + \delta y) - f(x + \delta x, y + \delta y) \\ - [f(x + d x, y) - f(x, y)]$$

Первая часть этого уравненія содержитъ величину безконечно ма-
лую втораго порядка, а потому при разложеніи въ строку Тай-
лера членовъ второй части уравненія должно удержатъ члены
втораго измѣренія приращеній.

Пользуясь означеніемъ на сей разъ весьма удобнымъ:

$$\frac{d u}{d x} = f'(x), \frac{d^2 u}{d x^2} = f''(xx), \frac{d^2 u}{d x d y} = f''(xy),$$

получимъ

$$\delta d_x u = f(x, y) + f'(x) [\delta x + d x + d_x \delta x] + f'(y) \delta y \\ + \frac{1}{2} f''(xx) [\delta x + d x + d_x \delta x]^2 + \frac{1}{2} f''(yy) \delta y^2 \\ + f'(x, y) [\delta x + d x + d_x \delta x] \delta y - f(x, y) - f'(x) \delta x \\ - f'(y) \delta y - \frac{1}{2} f''(xx) \delta x^2 - \frac{1}{2} f''(yy) \delta y^2 - f''(xy) \delta x \delta y \\ - f(x, y) - f'(x) d x - \frac{1}{2} f''(xx) d x^2 + f(x, y),$$

что по сокращеніи даетъ

$$\delta d_x u = f'(x) d_x \delta x + f''(xx) d x \delta x + f''(xy) d x \delta y.$$

Измѣняя x въ $x + \delta x$, въ функціи dx , мы писали

$$d(x + \delta x) = dx + d_x \delta x,$$

желая тѣмъ выразить, что δx и δy должно разсматривать функціями переменныхъ x и y . Чтобы доказать необходимость такого понятія, стоитъ замѣтить, что x и y можно разсматривать функціями двухъ другихъ переменныхъ p и q , то есть полагать

$$x = \varphi(p, q), \quad y = \psi(p, q),$$

затѣмъ δx и δy будутъ также функціями переменныхъ p и q , которыя можно выразить въ начальныхъ переменныхъ x, y .

Можно придти къ выраженію $\delta d_x u$ другимъ простѣйшимъ путемъ. Въ самомъ дѣлѣ, варьируя уравненіе $d_x u = \frac{df(x, y)}{dx} dx$,

и пользуясь предыдущимъ означеніемъ получимъ

$$\delta d_x u = f'(x) \delta dx + f''(xx) dx \delta x + f''(xy) dx \delta y,$$

и какъ $\delta dx = d(x + \delta x) - dx = d_x \delta x$, то будетъ

$$\delta d_x u = f'(x) d_x \delta x + f''(xx) dx \delta x + f''(xy) dx \delta y.$$

Съ другой стороны, если дифференцируемъ полный варіаціонъ функціи u ,

$$\delta u = f'(x) \delta x + f'(y) \delta y,$$

то получимъ

$$d_x \delta u = f'(x) d_x \delta x + f''(xx) dx \delta x + f''(xy) dx \delta y + f'(y) d_x \delta y$$

Сравнивая это выраженіе съ предыдущимъ, находимъ

$$d_x \delta u - \delta d_x u = f'(y) d_x \delta y$$

или

$$\delta d_x u = d_x \delta u - \left(\frac{d u}{d y} \right) d_x \delta y.$$

Подобнымъ образомъ найдемъ

$$\delta d_y u = d_y \delta u - \left(\frac{d u}{d x} \right) d_y \delta x$$

Вообще для функцій со многими переменными будетъ

$$\delta d_x u = d_x \delta u - \frac{d u}{d y} d_x \delta y - \frac{d u}{d z} d_x \delta z - \dots$$

$$\delta d_y u = d_y \delta u - \frac{d u}{d x} d_y \delta x - \frac{d u}{d z} d_y \delta z \dots$$

Если же варіаціонъ будетъ собственный, то прѣжняя теорема

опять имѣетъ мѣсто. Въ самомъ дѣлѣ, пусть $u = f(x, y)$, $\delta u = \omega(x, y)$, будетъ

$$d_x \delta u = \omega'(x) dx,$$

$$\begin{aligned} \delta \cdot d_x u &= \delta \cdot [f(x + dx, y) - f(x, y)] = F(x + dx, y) - F(x, y) \\ &= f(x + dx, y) - f(x, y) - F'(x) dx - f'(x) dx = \omega'(x) dx \\ &= d_x \omega(x) = d_x \delta u. \end{aligned}$$

Приложеніе. Изложенная теорія варіаціоновъ приводитъ простѣйшимъ путемъ къ нѣкоторымъ уравненіямъ, имѣющимъ значеніе въ прикладной математикѣ. Напримѣръ, условіе неразрывности массы находящейся въ движеніи выражается

$$\delta \cdot (\rho dx dy dz) = 0,$$

гдѣ ρ означаетъ плотность массы въ точкѣ опредѣленной прямоугольными координатами x, y, z . Это условіе даетъ сначала

$$dx dy dz \left[\delta \rho + \rho \frac{\delta (dx dy dz)}{dx dy dz} \right] = 0,$$

но по изложенной теоріи варіаціоновъ будетъ

$$\delta (dx dy dz) = dy dz \delta dx + dx dz \delta dy + dx dy \delta dz,$$

$$\delta dx = d(x + \delta x) - dx = d_x \delta x = \left(\frac{d\delta x}{dx} \right) dx,$$

$$\delta dy = d(y + \delta y) - dy = d_y \delta y = \left(\frac{d\delta y}{dy} \right) dy,$$

$$\delta dz = d(z + \delta z) - dz = d_z \delta z = \left(\frac{d\delta z}{dz} \right) dz,$$

слѣдовательно

$$\delta (dx dy dz) = dx dy dz \left[\frac{d\delta x}{dx} + \frac{d\delta y}{dy} + \frac{d\delta z}{dz} \right],$$

что приводитъ условіе неразрывности массы къ виду

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{d\delta x}{dx} + \frac{d\delta y}{dy} + \frac{d\delta z}{dz} = 0.$$

ОБЩАЯ ЛАГРАНЖЕВА ЗАДАЧА.

§ VI.

Перейдемъ теперь къ изслѣдованію выраженія

$$\delta \cdot \int_{x_0}^X U dx, \quad \text{гдѣ } U = f\left(x, y, \frac{dy}{dx} \dots \frac{d^n y}{dx^n}\right),$$

и впервыхъ докажемъ, что

$$\delta \cdot \int_{x_0}^X U dx = \int_{x_0}^X \delta(U dx).$$

Въ самомъ дѣлѣ, если представимъ данный интегралъ суммою элементовъ, то будетъ

$$\int_{x_0}^X U dx = U_0 dx_0 + U_1 dx_1 + U_2 dx_2 + \dots U_{n-1} dx_{n-1},$$

величины $x_0, x_1, \dots x_{n-1}$ берутся между границами x_0, X и такимъ образомъ, чтобы

$$x_0 + dx_0 = x_1, x_1 + dx_1 = x_2 \text{ и такъ далѣе,}$$

при томъ разности $dx_0, dx_1, \dots$ бесконечно малы. Поставляя въ этой суммѣ $x + \delta x$ на мѣсто x , получимъ

$$U'_0 dx'_0 + U'_1 dx'_1 + U'_2 dx'_2 + \dots U'_{n-1} dx'_{n-1},$$

при означеніи

$$dx'_0 = dx_0 + \delta dx_0, dx'_1 = dx_1 + \delta dx_1, \dots$$

$$U'_0 = U_0 + \delta U_0, U'_1 = U_1 + \delta U_1, \dots$$

Новая сумма можетъ быть представлена интеграломъ $\int_{x_0}^X U' dx'$, по-

тому что dx'_0, dx'_1 и проч. бесконечно малыя и при томъ смежны, то есть

$$x'_1 = x_1 + \delta x_1 = x_0 + dx_0 + \delta(x_0 + dx_0) = x_0 + \delta x_0 + d(x_0 + \delta x_0) = x'_0 + d. x'_0, x'_2 = x'_1 + d. x'_1 \text{ и проч.}$$

За тѣмъ будетъ

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^X U' dx' - \int_{x_0}^X U dx &= (U'_0 dx'_0 - U_0 dx_0) + (U'_1 dx'_1 - U_1 dx_1) \\ &+ \dots [U'_{n-1} dx'_{n-1} - U_{n-1} dx_{n-1}] \\ &= \delta(U_0 dx_0) + \delta(U_1 dx_1) + \dots \delta(U_{n-1} dx_{n-1}). \end{aligned}$$

Здѣсь первая часть уравненія даетъ $\int_{x_0}^X \delta(U dx)$, вторая же

есть точное выраженіе для $\delta \cdot \int_{x_0}^X U dx$, слѣдовательно предложенная теорема справедлива.

Тоже самое можно доказать еще другимъ образомъ.

Положимъ $X = \varphi(t)$, $\delta x = \delta \varphi(t) = \omega(t)$ и означимъ t_0 и T значенія новаго переменнаго t при $x = x_0$ и $x = X$; будетъ

$$\int_{x_0}^X U dx = \int_{t_0}^T U \varphi'(t) dt.$$

Если варируемъ обѣ части этого уравненія, замѣчая что вариационъ не относится къ t , а только къ функціи φ , то получимъ

$$\delta \cdot \int_{x_0}^X U dx = \int_{t_0}^T dt \delta \cdot U \varphi'(t)$$

Но имѣемъ

$$\delta \cdot U \varphi'(t) = \varphi'(t) \delta U + U \delta \varphi'(t),$$

$$\begin{aligned} \delta \varphi'(t) &= \delta \cdot \frac{\varphi(t+dt) - \varphi(t)}{dt} = \frac{\omega(t+dt) - \omega(t)}{dt} \\ &= \omega'(t) = \frac{d\delta x}{dt} = \frac{\delta dx}{dt}, \end{aligned}$$

слѣдовательно будетъ

$$\delta \cdot \int_{x_0}^X U dx = \int_{t_0}^T \left(\delta U \frac{dx}{dt} + U \frac{\delta dx}{dt} \right) dt = \int_{t_0}^T \frac{\delta (U dx)}{dt} dt$$

Наконецъ, возвращаясь къ начальному переменному x , будетъ

$$\int_{t_0}^T \frac{\delta (U dx)}{dt} dt = \int_{x_0}^X \delta (U dx) \cdot \frac{dt}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \int_{x_0}^X \delta (U dx).$$

И такъ варіированіе въ опредѣленныхъ интегралахъ неизмѣняетъ границъ интегрированія, а только элементы интеграла. Въ этомъ заключается весьма важное различіе вариационнаго способа съ обыкновеннымъ измѣненіемъ произвольныхъ постоянныхъ, которое въ опредѣленныхъ интегралахъ происходитъ слѣдующимъ образомъ. Пусть $\int_a^b f(x, \alpha) dx = \varphi(x, \alpha)$, будетъ

$$\int_a^b f(x, \alpha) dx = \varphi(b, \alpha) - \varphi(a, \alpha)$$

Дифференцируя это уравненіе въ отношеніи α , рассматривая b и a

функциями отъ α , получимъ

$$\frac{d}{d\alpha} \int_a^b f(x, \alpha) dx = \varphi'_b(b, \alpha) \frac{db}{d\alpha} - \varphi'_a(a, \alpha) \frac{da}{d\alpha} + \frac{\varphi(b, \alpha + d\alpha) - \varphi(a, \alpha + d\alpha) - \varphi(b, \alpha) + \varphi(a, \alpha)}{d\alpha}$$

и какъ

$$\varphi(b, \alpha + d\alpha) - \varphi(a, \alpha + d\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha + d\alpha) dx,$$

то будетъ

$$\frac{d}{d\alpha} \int_a^b f(x, \alpha) dx = \int_a^b \frac{df(x, \alpha)}{d\alpha} dx + \frac{db}{d\alpha} f(b, \alpha) - \frac{da}{d\alpha} f(a, \alpha)$$

И такъ измѣненіе произвольнаго постояннаго въ опредѣленныхъ интегралахъ даетъ новыя границы интегрированія, то есть новое число элементовъ въ интегралѣ.

Теперь, чтобы вывести общее выраженіе для $\delta \cdot \int_{x_1}^{x_2} U dx$, гдѣ

$$U = f(x, y, y', y'', \dots y^{(n)}), \quad y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}, \dots$$

должно переменнѣй величинѣ x дать приращеніе δx , въ слѣдствіе чего функція y получитъ приданный варіаціонъ $y' \delta x$, и если собственный варіаціонъ функціи y означимъ $\omega(x)$ или просто ω , то полный варіаціонъ будетъ $\delta y = y' \delta x + \omega$.

За тѣмъ варіаціонъ функціи y' получимъ слѣдующимъ образомъ:

$$\delta y' = \delta \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dx \delta dy - dy \delta dx}{dx^2} = \frac{d\delta y}{dx} - y' \frac{d\delta x}{dx},$$

съ другой стороны, дифференціалъ уравненія

$$\delta y = y' \delta x + \omega$$

дастъ

$$\frac{d\delta y}{dx} = y'' \delta x + y' \frac{d\delta x}{dx} + \omega',$$

слѣдовательно будетъ

$$\delta y' = y'' \delta x + \omega'.$$

Поступая подобнымъ образомъ при опредѣленіи $\delta y''$, $\delta y'''$.. приходимъ къ уравненіямъ

$$\delta y'' = y''' \delta x + \omega''$$

$$\delta y''' = y'''' \delta x + \omega'''$$

⋮

$$\delta y^{(n)} = y^{(n+1)} \delta x + \omega^{(n)}$$

Но мы знаемъ, что

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} U dx = \int_{x_1}^{x_2} \delta(U dx),$$

$$\delta(U dx) = dx \delta U + U \delta dx,$$

слѣдовательно

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} U dx = \int_{x_1}^{x_2} \delta U dx + \int_{x_1}^{x_2} U \delta dx,$$

и какъ $\int_{x_1}^{x_2} U \delta dx = \int_{x_1}^{x_2} U d\delta x = U_2 \delta x_2 - U_1 \delta x_1 - \int_{x_1}^{x_2} dU \delta x,$

то будетъ

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} U dx = U_2 \delta x_2 - U_1 \delta x_1 + \int_{x_1}^{x_2} (\delta U dx - dU \delta x)$$

Положимъ теперь

$$dU = L dx + M dy + N dy' + P dy'' + \dots Z dy^{(n)},$$

$L, M, N, \dots$ означаютъ, какъ показываетъ самое выраженіе, частныя производныя функции U по переменнымъ $x, y, y' \dots$. Вместь съ этимъ точнымъ уравненіемъ, можно по строкъ Тайлера написать

$$\delta U = L \delta x + M \delta y + N \delta y' + P \delta y'' + \dots Z \delta y^{(n)}.$$

Если въ выраженіе dU поставимъ значенія

$$dy = y' dx, \quad dy' = y'' dx, \quad \text{и проч.}$$

и въ выраженіе δU ,

$$\delta y = y' \delta x + \omega, \quad \delta y' = y'' \delta x + \omega' \quad \text{и проч.}$$

то получимъ еще,

$$\delta U = (L + My' + Ny'' + Zy^{n+1}) \delta x + M\omega + N\omega' + \dots + Z\omega^{(n)},$$

$$dU = (L + My' + Ny'' + \dots Zy^{n+1}) dx;$$

изъ этихъ двухъ уравненій имѣемъ

$$\delta U dx - dU \delta x = (M\omega + N\omega' + P\omega'' + \dots Z\omega^n) dx$$

и слѣдовательно

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} U dx = U_2 \delta x_2 - U_1 \delta x_1 + \int_{x_1}^{x_2} (M\omega + N\omega' + P\omega'' + \dots Z\omega^n) dx$$

Далѣе, интегрированіе по частямъ даетъ

$$\int N\omega' dx = \int Nd\omega = \omega N - \int \frac{dN}{dx} \omega dx,$$

$$\int P\omega'' dx = \int Pd\omega' = \omega' P - \omega \frac{dP}{dx} + \int \omega \frac{d^2 P}{dx^2} dx,$$

$$\int Q\omega''' dx = \omega'' Q - \omega' \frac{dQ}{dx} + \omega \frac{d^2 Q}{dx^2} - \int \frac{d^3 Q}{dx^3} \omega dx, \text{ и проч.}$$

Если вставимъ эти значенія въ предъидущее уравненіе, то окончательно получимъ

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} U dx = \Omega_2 - \Omega_1 + \int_{x_1}^{x_2} \left(M - \frac{dN}{dx} + \frac{d^2 P}{dx^2} - \dots \pm \frac{d^n Z}{dx^n} \right) \omega dx,$$

гдѣ означаемъ

$$\Omega = U\delta x + \omega \left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2 Q}{dx^2} + \dots \right)$$

$$+ \omega' \left(P - \frac{dQ}{dx} + \dots \right)$$

$$+ \omega'' \left(Q - \frac{dR}{dx} + \dots \right)$$

$$+ \omega^{(n-1)} \cdot Z$$

Еслибы функція U содержала x_1 , x_2 и соотвѣтствующія имъ значенія функцій y_1 , y'_1 , $\dots$, y_2 , y'_2 , $\dots$, въ такомъ случаѣ выраженіе

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} U dx$$

будетъ содержать еще члены зависящіе отъ прираще-

ній δx_1 , δx_2 , δy_1 , δy_2 и проч., то есть

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{dU}{dx_1} \delta x_1 + \frac{dU}{dx_2} \delta x_2 + \frac{dU}{dy_1} \delta y_1 + \frac{dU}{dy_2} \delta y_2 + \dots \right) dx,$$

и какъ величины $\delta x_1, \delta x_2, \delta y_1, \delta y_2$ и проч. должно разсматривать произвольными, то будетъ

$$\delta x_1 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dU}{dx_1} dx + \delta x_2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dU}{dx_2} dx + \delta y_1 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dU}{dy_1} dx + \delta y_2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dU}{dy_2} dx + \dots$$

Чтобы тотчасъ показать приложеніе общей формулы варіаціона для интеграловъ, замѣтимъ, что изъ этой формулы непосредственно слѣдуетъ Эйлерово условіе интегрируемости функцій. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что функція U есть точная производная, такъ что если сдѣлаемъ $\int U dx = \varphi(x)$, то функція $\varphi(x)$ не содержитъ знака интегрированія. Затѣмъ получимъ

$$\int_{x_1}^{x_2} U dx = \varphi(x_2) - \varphi(x_1),$$

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} U dx = \varphi'(x_2) \delta x_2 - \varphi'(x_1) \delta x_1$$

Сравнивая послѣднее уравненіе съ общимъ выраженіемъ для

$\delta \int_{x_1}^{x_2} U dx$, необходимо принять

$$\varphi'(x) = \Omega, \int_{x_1}^{x_2} \left(M - \frac{dN}{dx} + \frac{d^2 P}{dx^2} - \dots - \frac{d^n Z}{dx^n} \right) \omega dx = 0$$

Но послѣднее уравненіе содержитъ подъ знакомъ интегрированія произвольную функцію ω , слѣдовательно интегралъ не иначе можно привести къ нулю, какъ полагая

$$M - \frac{dN}{dx} + \frac{d^2 P}{dx^2} - \dots \pm \frac{d^n Z}{dx^n} = 0,$$

что и есть Эйлерово условіе интегрируемости функцій.

Выраженіе варіаціона для опредѣленнаго интеграла можно представить подъ видомъ болѣе общимъ. Пусть функція U содержитъ, кромѣ $x, y, y', y'', y^{(n)}$, еще z функцію отъ x и производныя $z', z'', \dots z^{(m)}$. Выраженіе полного дифференціала dU будетъ

$$dU = Ldx + Mdy + Ndy' + Pdy'' + \dots Zdy^{(n)} \\ + mdz + ndz' + pdz'' + \dots \zeta dz^{(m)}$$

и подобное выраженіе для δU ,

$$\delta U = L\delta x + M\delta y + N\delta y' + P\delta y'' + \dots Z\delta y^{(n)} \\ + m\delta z + n\delta z' + p\delta z'' + \dots \zeta\delta z^{(m)},$$

L, M, N и проч. m, n, p и проч. означаютъ, какъ показываетъ самое выраженіе, производныя функціи U по $x, y, y' \dots z, z' \dots z^{(m)}$. Если въ эти выраженія поставимъ значенія

$$\begin{aligned} dy &= y' dx, \quad dy' = y'' dx, \dots & dy^{(n)} &= y^{(n+1)} dx, \\ dz &= z' dx, \quad dz' = z'' dx, \dots & dz^{(m)} &= z^{(m+1)} dx, \end{aligned}$$

и въ тоже время слѣдующія значенія варіаціоновъ

$$\begin{aligned} \delta y &= y' \delta x + \omega, & \delta z &= z' \delta x + \varphi \\ \delta y' &= y'' \delta x + \omega', & \delta z' &= z'' \delta x + \varphi', \\ \dots & & \dots & \\ \delta y^{(n)} &= y^{(n+1)} \delta x + \omega^{(n)}, & \delta z^{(m)} &= z^{(m+1)} \delta x + \varphi^{(m)}, \end{aligned}$$

то получимъ

$$\begin{aligned} dU &= (L + y' M + y'' N + \dots + y^{(n+1)} Z \\ &\quad + z' m + z'' n + \dots + z^{(m+1)} \zeta) dx, \\ \delta U &= (L + y' M + y'' N + \dots + y^{(n+1)} Z \\ &\quad + z' m + z'' n + \dots + z^{(m+1)} \zeta) \delta x \\ &\quad + \omega M + \omega' N + \omega'' P + \dots + \omega^{(n)} Z \\ &\quad + \varphi m + \varphi' n + \dots + \varphi^{(m)} \zeta \end{aligned}$$

откуда находимъ

$$\begin{aligned} \delta U dx - dU \delta x &= (\omega M + \omega' N + \dots + \omega^{(n)} Z) dx \\ &\quad + (\varphi m + \varphi' n + \dots + \varphi^{(m)} \zeta) dx \end{aligned}$$

Теперь по общей формулѣ

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} U dx = U_2 \delta x_2 - U_1 \delta x_1 + \int_{x_1}^{x_2} (\delta U dx - dU \delta x)$$

будетъ

$$\begin{aligned} \delta \int_{x_1}^{x_2} U dx &= U_2 \delta x_2 - U_1 \delta x_1 + \int_{x_1}^{x_2} (\omega M + \omega' N + \dots + \omega^{(n)} Z) dx \\ &\quad + \int_{x_1}^{x_2} (\varphi m + \varphi' n + \dots + \varphi^{(m)} \zeta) dx \end{aligned}$$

и если интегрируемъ по частямъ члены

$$\int \omega' N dx, \quad \int \varphi' n dx$$

$$\int \omega'' P dx, \quad \int \varphi'' p dx$$

$$\int \omega^{(n)} Z dx, \quad \int \varphi^{(m)} \zeta dx$$

то окончательно получимъ

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} U dx = \Omega_2 - \Omega_1 + \int_{x_1}^{x_2} (\omega H + \varphi G) dx, \quad (2)$$

гдѣ означаемъ для сокращенія

$$H = M - \frac{dN}{dx} + \frac{d^2 P}{dx^2} - \dots \pm \frac{d^n Z}{dx^n},$$

$$G = m - \frac{dn}{dx} + \frac{d^2 p}{dx^2} - \dots \pm \frac{d^m \zeta}{dx^m},$$

$$\begin{aligned} \Omega = & U \delta x + \omega \left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2 Q}{dx^2} - \dots \right) + \varphi \left(n - \frac{dp}{dx} + \dots \right) \\ & + \omega' \left(P - \frac{dQ}{dx} + \dots \right) + \varphi' \left(p - \frac{dq}{dx} + \dots \right) \\ & + \omega'' \left(Q - \frac{dR}{dx} + \dots \right) + \varphi'' \left(q - \frac{dr}{dx} + \dots \right) \\ & \vdots \\ & + \omega^{(n-1)} Z + \varphi^{(m-1)} \zeta \end{aligned}$$

Если бы переменныя x, y, z должны были удовлетворить нѣкоторому условію, на примѣръ уравненію

$$F(x, y, z) = 0,$$

то одну изъ произвольныхъ функцій φ или ω можно исключить слѣдующимъ образомъ: варируя условное уравненіе получимъ

$$\frac{dF}{dx} \delta x + \frac{dF}{dy} \delta y + \frac{dF}{dz} \delta z = 0,$$

и какъ $\delta y = y' \delta x + \omega$, $\delta z = z' \delta x + \varphi$, то будетъ

$$\begin{aligned} & \left(\frac{dF}{dx} + y' \frac{dF}{dy} + z' \frac{dF}{dz} \right) \delta x \\ & + \omega \frac{dF}{dy} + \varphi \frac{dF}{dz} = 0. \end{aligned}$$

Но непосредственное дифференцирование даетъ

$$\frac{dF}{dx} + y' \frac{dF}{dy} + z' \frac{dF}{dz} = 0,$$

следовательно останется

$$\omega \frac{dF}{dy} + \varphi \frac{dF}{dz} = 0,$$

откуда

$$\varphi = - \frac{\left(\frac{dF}{dy}\right)}{\left(\frac{dF}{dz}\right)} \cdot \omega$$

Итакъ общее выраженіе вариціона будетъ

$$\delta \cdot \int_{x_1}^{x_2} U dx = \Omega_2 - \Omega_1 + \int_{x_1}^{x_2} \left(H \frac{dF}{dz} - G \frac{dF}{dy} \right) \cdot \frac{\omega dx}{\left(\frac{dF}{dy}\right)} \quad (3).$$

§ VII.

Поводомъ къ изобрѣтенію вариціональнаго вычисленія были задачи о самыхъ большихъ и самыхъ меньшихъ значеніяхъ опредѣленныхъ интеграловъ. Таковы: а) на данной поверхности и между двумя данными точками провести кривую кратчайшей длины; б) найти кривую линію, по которой скатъ тяжелой точки происходилъ бы въ кратчайшее время; в) опредѣлить поверхность твердаго тѣла, при которой сопротивленіе среды, въ которой движется тѣло, было бы наименьшимъ; и проч. Мы въ послѣдствіи изложимъ подробнѣе общую теорію о наибольшихъ и наименьшихъ значеніяхъ функцій, а теперь заимствуемъ въ немногихъ словахъ теорію *de maximis et minimis* изъ дифференціального вычисленія. Возьмемъ функцію f независимыхъ переменныхъ $x, y, z \dots$ и положимъ $f(x, y, z \dots) = V$.

Если дадимъ переменнымъ x, y, z произвольныя, но весьма малыя приращенія $g, h, k \dots$, то функція V также получитъ приращеніе ΔV , такъ что будетъ

$$f(x + g, y + h, z + k, \dots) = V + \Delta V,$$

Теперь разлагая функцію f въ Тайлорову строку, получимъ

$$V + \delta V + \frac{1}{2} \delta^2 V + \frac{1}{3!} \delta^3 V + \dots = V + \Delta V,$$

гдѣ знаками δ , δ^2 , δ^3 и проч. выражаемъ суммы членовъ перваго, втораго, третьяго и проч. измѣреній въ отношеніи количествъ g , h , k и проч.

Положимъ теперь, что переменнымъ x , y , z . . приписано именно то значеніе, при которомъ функція V принадлежитъ самое большое или самое меньшее значеніе, тогда необходимо существуетъ условіе

$$V + \Delta V < V, \text{ въ случаѣ max.}$$

$$V + \Delta V > V, \text{ въ случаѣ min.}$$

Это условіе въ слѣдствіе предыдущаго уравненія даетъ

$$(a) \quad \delta V + \frac{1}{2} \delta^2 V + \frac{1}{2 \cdot 3} \delta^3 V + \dots < 0, \text{ для max.}$$

$$(b) \quad \delta V + \frac{1}{2} \delta^2 V + \frac{1}{2 \cdot 3} \delta^3 V + \dots > 0, \text{ для min.}$$

Но возможность значеній *maxim* или *minim* предполагаетъ функцію V непрерывною, слѣдовательно съ безпредѣльнымъ уменьшеніемъ приращеній g , h , k можно сдѣлать сумму

$$\frac{1}{2} \delta^2 V + \frac{1}{2 \cdot 3} \delta^3 V + \dots$$

несравненно менѣе количества δV , то есть алгебраическій знакъ строкъ (a) и (b) будетъ тотъ же самый, что и предъ δV . Съ другой стороны, знакъ предъ δV , предполагая знаки количествъ g , h , k произвольными, не можетъ быть сдѣланъ ни постояннымъ $+$, ни постояннымъ $-$; отсюда заключаемъ, что необходимо полагать $\delta V = 0$.

Принявъ это условіе, знаки строкъ (a) и (b) приводятся къ знаку предъ членомъ $\frac{1}{2} \delta^2 V$; такъ что признаки для *maxim* и *minim* функціи V будутъ

$$\delta^2 V < 0, \text{ для max.}$$

$$\delta^2 V > 0, \text{ для min.}$$

Если бы случилось, что условіе $\delta V = 0$ даетъ въ тоже время $\delta^2 V = 0$, тогда строки (a) и (b) приводятся къ слѣдующимъ

$$\frac{1}{2 \cdot 3} \delta^3 V + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} \delta^4 V + \dots < 0, \text{ для max.}$$

$$\frac{1}{2 \cdot 3} \delta^3 V + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} \delta^4 V + \dots > 0, \text{ для min.}$$

и слѣдовательно, для бесконечно малыхъ g , h , k ,

$$\delta^3 V < 0, \text{ для max.}$$

$$\delta^3 V > 0, \text{ для min.}$$

Если бы вмѣсто функціи V былъ заданъ интегралъ $\int_{x_1}^{x_2} U dx$, въ которомъ означаемъ $F(x, y, y', y'' \dots y^{(n)}) = U$,

и гдѣ y предполагается функциею отъ x , и если бы требовалось опредѣлить функцию y такимъ образомъ, чтобы значеніе предъидущаго интеграла было *maximum* или *minimum*, въ такомъ случаѣ должно пользоваться общимъ выраженіемъ варіациона и полагать

$$\delta \cdot \int_{x_1}^{x_2} U dx = 0. \quad (1).$$

Но мы видѣли, что

$$\delta \cdot \int_{x_1}^{x_2} U dx = \Omega_2 - \Omega_1 + \int_{x_1}^{x_2} \omega \left(M - \frac{dN}{dx} + \frac{d^2P}{dx^2} \dots \pm \frac{d^n Z}{dx^n} \right) dx,$$

гдѣ для сокращенія полагаемъ

$$\begin{aligned} \Omega &= U \delta x + \omega \left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \dots \right) \\ &\quad + \omega' \left(P - \frac{dQ}{dx} + \dots \right) \\ &\quad + \omega'' \left(Q - \frac{dR}{dx} + \dots \right) + \dots + \omega^{(n-1)} Z, \end{aligned}$$

и также

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \delta y - y' \delta x, \\ \omega' &= \delta y' - y'' \delta x, \\ \omega'' &= \delta y'' - y''' \delta x, \end{aligned} \right\} \quad (\omega)$$

и гдѣ количества $M, N, P, \dots Z$ означаютъ частныя производныя функции U , то есть опредѣляются уравненіемъ

$$dU = Ldx + Mdy + Ndy' + Pdy'' + \dots Zdy^{(n)}$$

Здѣсь функция ω совершенно произвольная, слѣдовательно удовлетворяя условію (1) должно полагать отдѣльно

$$\Omega_2 - \Omega_1 = 0 \quad (2)$$

$$M - \frac{dN}{dx} + \frac{d^2P}{dx^2} - \dots \pm \frac{d^n Z}{dx^n} = 0 \quad (3).$$

Послѣднее уравненіе есть то самое, которое должно служить для опредѣленія функции y , то есть изъ него получимъ $y = \text{const.}(x)$.

Разсматривая уравненіе (3), замѣчаемъ, что оно содержитъ дифференціалы до n порядка; но въ выраженіе функции Z входитъ $\frac{d^n y}{dx^n}$, слѣдовательно это уравненіе $2n$ порядка въ отношеніи

къ производнымъ функции y . Отсюда заключаемъ, что выраженіе функции y должно содержать $2n$ произвольныхъ постоянныхъ.

Посмотримъ теперь какимъ образомъ опредѣляются эти постоянныя. Для этого возьмемъ уравненіе (2), и въ выраженіе функціи Ω вставимъ значенія количествъ $\omega, \omega', \omega'' \dots$ изъ уравненій (1); такимъ образомъ получимъ

$$\begin{aligned} \Omega = & U\delta x + (\delta y - y' \delta x) \left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2 Q}{dx^2} - \dots \right) \\ & + (\delta y' - y'' \delta x) \left(P - \frac{dQ}{dx} + \dots \right) \\ & + (\delta y'' - y''' \delta x) \left(Q - \frac{dR}{dx} + \dots \right) \\ & + \dots + (\delta y^{(n-1)} - y^{(n)} \delta x) Z. \end{aligned} \quad (4)$$

Предположимъ во первыхъ, что между варіаціонами $\delta x_2, \delta y_2, \dots, \delta x_1, \delta y_1, \dots$ никакой зависимости не дано.

Толкуя геометрически, представимъ кривую отнесенную къ прямоугольнымъ осямъ координатъ x, y и положимъ, что абсциссы крайнихъ ея точекъ будутъ x_1 и x_2 . Если кривая имѣетъ свойство гибкой нити, то очевидно, что измѣняя положеніе ея крайнихъ точекъ, независимо одну отъ другой, сдѣлаемъ величины $\delta x_2, \delta y_2, \dots, \delta x_1, \delta y_1$ также независимыми одинъ отъ другихъ. Но въ такомъ предположеніи уравненіе (2) разбивается на два слѣдующихъ

$$\Omega_2 = 0 \quad (m), \quad \Omega_1 = 0 \quad (n)$$

Такимъ образомъ мы получимъ два уравненія для опредѣленія постоянныхъ, входящихъ въ выраженіе функціи y , и какъ въ каждомъ уравненіи функцію Ω должно замѣнить выраженіемъ (4) и вставить въ оное x_1 и x_2 вмѣсто x , то предположивъ величины $\delta x_1, \delta y_1, \delta y'_1, \dots, \delta x_2, \delta y_2, \delta y'_2, \dots$ совершенно независимыми между собою, мы должны будемъ, удовлетворяя уравненіямъ (m) и (n), уравнивать нулю коэффициенты при различныхъ варіаціонахъ, для каждаго отдѣльно.

Но такимъ образомъ получаютъ $2n + 2$ уравненій, изъ коихъ $2n$ достаточны для опредѣленія всѣхъ постоянныхъ, входящихъ въ выраженіе функціи y , два же остальныхъ назначаютъ условія для самыхъ границъ интеграла, то есть опредѣляютъ x_1, x_2 .

Во вторыхъ, если x_1, x_2 предполагаются данными постоянными, и слѣдовательно $\delta x_1 = 0, \delta x_2 = 0$, въ такомъ случаѣ уравненія (m) и (n) даютъ $2n$ условій для опредѣленія $2n$ произвольныхъ постоянныхъ.

Если между варіаціонами $\delta x_1, \delta x_2, \delta y_1, \delta y_2$ и пр. предполагается нѣкоторая зависимость, на примѣръ уравненіе

$$H(\delta x_1, \delta x_2, \delta y_1, \delta y_2, \dots) = 0$$

то, опредѣливъ значеніе одного изъ варіаціоновъ въ функціи прочихъ, должно вставить эту величину въ уравненіе $\Omega_2 - \Omega_1 = 0$ и потомъ уравнивать нулю коэффиціенты оставшихся произвольныхъ варіаціоновъ. Вообще, если число условныхъ уравненій выражающихъ зависимость между варіаціонами при границахъ интеграла не болѣе $2n + 1$, то они въ совокупности съ уравненіемъ $\Omega_2 - \Omega_1 = 0$ достаточны для опредѣленія произвольныхъ постоянныхъ содержащихся въ выраженіи функціи y .

Если *maxim* или *minim* опредѣленнаго интеграла,

$$\int_{x_1}^{x_2} U dx,$$

долженъ быть найденъ такимъ образомъ, чтобы въ то же время значеніе другого интеграла давало постоянную величину, на-
примѣръ

$$\int_{x_1}^{x_2} V dx = a,$$

то неизвѣстная функція называется *изопериметрическою*, и говорятъ: задача относится къ *изопериметрамъ*.

По условію *maxim*. или *minim*. должно полагать

$$\delta \cdot \int_{x_1}^{x_2} U dx = 0, \quad (A)$$

въ то же время, въ слѣдствіе постоянного значенія a ,

$$\delta \cdot \int_{x_1}^{x_2} V dx = 0. \quad (B)$$

Если границы интеграловъ предполагаются постоянными, то по условію (A) будетъ

$$\int_{x_1}^{x_2} \omega H dx = 0, \quad (C)$$

$$\text{гдѣ } H = \left(\frac{dU}{dy} \right) - \frac{d \cdot \left(\frac{dU}{dy'} \right)}{dx} + \frac{d^2 \cdot \left(\frac{dU}{dy''} \right)}{dx^2} - \dots \pm \frac{d^n \cdot \left(\frac{dU}{dy^n} \right)}{dx^n}$$

Подобнымъ образомъ условіе (B) даетъ

$$\int_{x_1}^{x_2} \omega G dx = 0, \quad (D)$$

и функція G происходитъ изъ V такимъ же образомъ, какъ H изъ U . Но если положимъ

$$\int_{x_1}^x \omega G dx = \psi(x),$$

то функція $\psi(x)$ будетъ такого свойства, что $\psi(x_1) = 0$, въ слѣдствіе самыхъ границъ интегрированія; и также $\psi(x_2) = 0$, въ слѣдствіе уравненія (D). Если дифференцируемъ предъидущее уравненіе, то получимъ

$$\omega G = \frac{d\psi(x)}{dx} = \psi'(x),$$

откуда
$$\omega = \frac{1}{G} \cdot \psi'(x).$$

Если вставимъ это выраженіе ω въ уравненіе (C), потомъ интегрируемъ по частямъ, то получимъ

$$\int \psi'(x) \cdot \frac{H dx}{G} = \frac{H}{G} \psi(x) - \int \frac{d\left(\frac{H}{G}\right)}{dx} \cdot \psi(x) dx,$$

и по вставленіи границъ интегрированія

$$(A) \quad 0 = \int_{x_1}^{x_2} \psi(x) \cdot d\left(\frac{H}{G}\right).$$

Чтобы удовлетворить этому уравненію, для произвольныхъ значеній функціи $\psi(x)$, необходимо полагать

$$\frac{d\left(\frac{H}{G}\right)}{dx} = 0,$$

что по интегрированіи даетъ $H = \alpha G$, означая чрезъ α произвольное постоянное, для опредѣленія котораго должно служить уравненіе

$$\int_{x_1}^{x_2} V dx = a.$$

И такъ задача объ изопериметрахъ приводится къ уравненіямъ

$$(B) \quad H - \alpha G = 0, \quad \int_{x_1}^{x_2} V dx = a.$$

Того же результата достигаемъ по способу неопредѣленныхъ множителей. Въ самомъ дѣлѣ, если умножаемъ интегралъ $\int_{x_1}^{x_2} V dx$ на неопредѣленную величину λ и складываемъ съ интеграломъ $\int_{x_1}^{x_2} U dx$, то получимъ по условію maximum или minimum

$$\delta \cdot \int_{x_1}^{x_2} (U + \lambda V) dx = 0,$$

откуда выводимъ

$$\int_{x_1}^{x_2} (H + \lambda G) \omega dx = 0$$

и слѣдовательно $H + \lambda G = 0$, гдѣ означаемъ

$$H = \frac{dU}{dy} - \frac{d\left(\frac{dU}{dy'}\right)}{dx} + \frac{d^2\left(\frac{dU}{dy''}\right)}{dx^2} - \dots$$

$$G = \frac{dV}{dy} - \frac{d\left(\frac{dV}{dy'}\right)}{dx} + \frac{d^2\left(\frac{dV}{dy''}\right)}{dx^2} - \dots$$

Простота способа неопредѣленныхъ множителей въ особенности обнаруживается въ задачахъ объ изопериметрахъ со многими условными уравненіями и съ переменными границами интеграловъ. Такъ, чтобы доставить интегралу $\int_{x_1}^{x_2} U dx$ значеніе maximum или minimum, между тѣмъ какъ интегралы $\int V dx = a$,

$\int W dx = b$ сохраняли бы данное значеніе, предполагая U, V, W

функциями независимой переменной x и неизвѣстныхъ функций y, z ,

должно полагать $\delta \cdot \int (U + \lambda V + \mu W) dx = 0$, гдѣ λ и μ означаютъ неопредѣленные постоянныя, которыхъ значеніе находится по данной величинѣ интеграловъ a и b . Здѣсь выраженіе варіаціоновъ составляются по общимъ формуламъ (2) и (3) § VI.

§ VIII.

Задача. Провести линію кратчайшей длины, между двумя точками въ пространствѣ или на данной поверхности.

Пусть x, y, z означаютъ прямоугольныя координаты какой нибудь точки искомой кривой, въ отношеніи начала осей координатъ взятаго въ пространствѣ произвольно. Выраженіе для бесконечно малаго элемента дуги s будетъ $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, а для самой дуги

$$s = \int_{x_1}^{x_2} dx \cdot \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}$$

гдѣ $y' = \frac{dy}{dx}$, $z' = \frac{dz}{dx}$; x_1 и x_2 границы интеграла данныя непосредственно или посредствомъ нѣкоторыхъ уравненій.

По условію *minimum* будетъ

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} dx \cdot \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} = 0.$$

Но мы должны различать здѣсь два случая: 1) искомая кривая свободна въ пространствѣ, и 2) кривая должна проходить на данной поверхности. Займемся сначала рѣшеніемъ перваго случая.

Возьмемъ общую формулу (2), § VI,

$$\begin{aligned} \delta \int_{x_1}^{x_2} U dx = & \Omega_2 - \Omega_1 + \int_{x_1}^{x_2} \left(M - \frac{dN}{dx} + \frac{d^2P}{dx^2} - \dots \right) \omega dx \\ & + \int_{x_1}^{x_2} \left(m - \frac{dn}{dx} + \frac{d^2p}{dx^2} - \dots \right) \varphi dx. \end{aligned}$$

Удовлетворяя условію нашей задачи, должно полагать

$$\Omega_2 - \Omega_1 = 0,$$

$$M - \frac{dN}{dx} + \frac{d^2P}{dx^2} - \dots = 0,$$

$$m - \frac{dn}{dx} + \frac{d^2p}{dx^2} - \dots = 0,$$

и какъ значеніе функцій $M, m, N, n, P, p..$ берется изъ уравненія

$$dU = \left(\frac{dU}{dx}\right) dx + Mdy + Ndy' + Pdy'' + .. \\ + mdz + ndz' + pdz'' + ..$$

и въ настоящемъ случаѣ

$$U = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2},$$

то получимъ

$$\Omega_2 - \Omega_1 = 0, \quad d\left(\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}\right) = 0, \quad d\left(\frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}\right) = 0.$$

Интегрированіе послѣднихъ двухъ уравненій даетъ

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = \text{Const.}, \quad \frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = \text{Const.}$$

откуда получимъ

$$\frac{dy}{dx} = A, \quad \frac{dz}{dx} = B,$$

и по второмъ интегрированіи

$$y = Ax + A', \quad z = By + B'$$

означая чрезъ A, A', B, B' произвольныя постоянныя. И такъ варіаціонный способъ подтверждаетъ первое положеніе геометріи, что *прямая линія есть кратчайшее разстояніе между двумя точками, данными въ свободномъ пространствѣ.*

Постоянныя A, A', B, B' опредѣляются различно, смотря по условіямъ даннымъ для концевъ искомой кривой.

1) Если двѣ точки, между которыми должно провести кратчайшую линію, предполагаются неподвижными въ пространствѣ и опредѣленными посредствомъ координатъ $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2$, то будетъ

$$\delta x_1 = 0, \quad \delta y_1 = 0, \quad \delta z_1 = 0 \\ \delta x_2 = 0, \quad \delta y_2 = 0, \quad \delta z_2 = 0$$

и условіе $\Omega_2 - \Omega_1 = 0$ удовлетворяется уничтоженіемъ каждаго члена отдѣльно.

2) Если который нибудь конецъ кривой долженъ оставаться на поверхности данной уравненіемъ $F(x, y, z) = 0$, въ такомъ случаѣ варіаціоны для этого конца $\delta y, \delta x, \delta z$ должны быть однозначительны съ дифференціалами координатъ точки взятой на данной поверхности dx, dy, dz ; слѣдовательно, по уравненію

$$\frac{dF}{dx} dx + \frac{dF}{dy} dy + \frac{dF}{dz} dz = 0,$$

будетъ

$$\frac{dF}{dx} \delta x + \frac{dF}{dy} \delta y + \frac{dF}{dz} \delta z = 0. \quad (f)$$

Съ другой стороны, общее выраженіе

$$\begin{aligned} \Omega = & U \delta x + \omega \left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2 Q}{dx^2} - \dots \right) + \varphi \left(u - \frac{dp}{dx} + \dots \right) \\ & + \omega' \left(P - \frac{dQ}{dx} + \dots \right) + \varphi' \left(p - \frac{dq}{dx} + \dots \right) \\ & + \omega'' \left(Q - \frac{dR}{dx} + \dots \right) + \varphi'' \left(q - \frac{dr}{dx} + \dots \right) + \text{etc} \end{aligned}$$

въ настоящемъ случаѣ даетъ

$$\Omega = \delta x \cdot \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} + \frac{y'(\delta y - y' \delta x)}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} + \frac{z'(\delta z - z' \delta x)}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}},$$

или короче

$$\Omega = \frac{\delta x + y' \delta y + z' \delta z}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}},$$

слѣдовательно, по условію $\Omega = 0$, получимъ

$$\delta x + y' \delta y + z' \delta z = 0. \quad (g)$$

Если исключимъ δx изъ уравненій (f) и (g), и сравнимъ коэффициенты произвольныхъ варіаціоновъ δy и δz , то получимъ два уравненія для опредѣленія постоянныхъ A и B ,

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dy} &= \frac{dF}{dx} \cdot \frac{dy}{dx} = A \frac{dF}{dx} \\ \frac{dF}{dz} &= \frac{dF}{dx} \cdot \frac{dz}{dx} = B \frac{dF}{dx} \end{aligned}$$

Двѣ же остальные постоянныя опредѣляются изъ условій данныхъ для другаго конца кривой.

Уравненіе (g) содержитъ весьма замѣчательный геометрическій смыслъ, а именно: если представимъ это уравненіе подъ видомъ

$$\frac{dx}{ds} \frac{\delta x}{ds} + \frac{dy}{ds} \frac{\delta y}{ds} + \frac{dz}{ds} \frac{\delta z}{ds} = 0,$$

то величины $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ будутъ представлять косинусы угловъ съ осями координатъ касательной линіи, проведенной къ кривой чрезъ точку ея пересѣченія съ данною поверхностію; также ве-

личины $\frac{\delta x}{ds}$, $\frac{\delta y}{ds}$, $\frac{\delta z}{ds}$ будутъ косинусы касательной къ поверхности; изъ предъидущаго уравненія слѣдуетъ, что линія кратчайшей длины встрѣчаетъ данную поверхность по направлению нормала.

3) Положимъ теперь, что кривая кратчайшей длины должна проходить всѣми точками на поверхности данной уравненіемъ $F(x, y, z) = 0$. Въ этомъ случаѣ должно пользоваться общимъ выраженіемъ вариціона (3), § VI, то есть

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} U dx = \Omega_2 - \Omega_1 + \int_{x_1}^{x_2} \left(H \frac{dF}{dz} - G \frac{dF}{dy} \right) \frac{\omega dx}{\left(\frac{dF}{dy} \right)},$$

гдѣ означаютъ по прежнему

$$H = M - \frac{dN}{dx} + \frac{d^2 P}{dx^2} - \dots$$

$$G = m - \frac{dn}{dx} + \frac{d^2 p}{dx^2} - \dots$$

По условію

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} = 0,$$

будетъ

$$\frac{dN}{dx} \left(\frac{dF}{dz} \right) = \frac{dn}{dx} \left(\frac{dF}{dy} \right),$$

и какъ здѣсь

$$N = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = \frac{dy}{ds},$$

$$n = \frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = \frac{dz}{ds},$$

то получимъ еще

$$\frac{d \frac{dy}{ds}}{\frac{dx}{\left(\frac{dF}{dy} \right)}} = \frac{d \frac{dz}{ds}}{\frac{dx}{\left(\frac{dF}{dz} \right)}}$$

Если будемъ разсматривать s какъ независимое переменное, то есть $d \cdot ds = 0$, то одно изъ уравненій кратчайшей линіи будетъ

$$\frac{\frac{d^2y}{ds^2}}{\left(\frac{dF}{dy}\right)} = \frac{\frac{d^2z}{ds^2}}{\left(\frac{dF}{dz}\right)},$$

Чтобы найти остальные уравненія этой кривой, напомнимъ предъидущее подъ видомъ

$$\frac{\frac{dy}{ds} \cdot \frac{d^2y}{ds^2}}{\frac{dz}{ds} \cdot \frac{d^2z}{ds^2}} = \frac{\frac{dy}{ds} \left(\frac{dF}{dy}\right)}{\frac{dz}{ds} \left(\frac{dF}{dz}\right)},$$

или, придавая единицу къ обѣимъ частямъ уравненія,

$$\frac{\frac{dy}{ds} \cdot \frac{d^2y}{ds^2}}{\frac{dy}{ds} \left(\frac{dF}{dy}\right)} + \frac{\frac{dz}{ds} \cdot \frac{d^2z}{ds^2}}{\frac{dz}{ds} \left(\frac{dF}{dz}\right)} = \frac{\frac{d^2z}{ds^2}}{\left(\frac{dF}{dz}\right)}$$

Но между переменными x, y, z и s предполагаются уравненія

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2,$$

$$F(x, y, z) = 0,$$

слѣдовательно будетъ

$$\begin{aligned} \frac{dy}{ds} \cdot \frac{d^2y}{ds^2} + \frac{dz}{ds} \cdot \frac{d^2z}{ds^2} &= -\frac{dx}{ds} \cdot \frac{d^2x}{ds^2}, \\ \frac{dy}{ds} \left(\frac{dF}{dy}\right) + \frac{dz}{ds} \left(\frac{dF}{dz}\right) &= -\frac{dx}{ds} \left(\frac{dF}{dx}\right); \end{aligned}$$

затѣмъ находимъ

$$\frac{d^2x}{ds^2} \left(\frac{dF}{dz}\right) = \frac{d^2z}{ds^2} \left(\frac{dF}{dx}\right)$$

И такъ три уравненія искомой кривой будутъ

$$\frac{\frac{d^2x}{ds^2}}{\left(\frac{dF}{dx}\right)} = \frac{\frac{d^2y}{ds^2}}{\left(\frac{dF}{dy}\right)} = \frac{\frac{d^2z}{ds^2}}{\left(\frac{dF}{dz}\right)}$$

Эта кривая называется *гeодезическою линіею*, потому что разстояніе точекъ на поверхности земнаго сфероида опредѣляется посредствомъ этой линіи.

Испытаемъ общія свойства разсматриваемой кривой. Во первыхъ, если геодезическая линія должна проходить на поверхности сферы, данной уравненіемъ

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0,$$

для котораго будетъ

$$\frac{dF}{dx} = 2x, \frac{dF}{dy} = 2y, \frac{dF}{dz} = 2z,$$

то изъ общихъ уравненій кривой получимъ

$$zd^2y - yd^2z = 0 \quad (a)$$

$$xd^2z - zd^2x = 0 \quad (b)$$

$$yd^2x - xd^2y = 0 \quad (c)$$

Первые интегралы уравненій (a), (b), (c) даютъ

$$zdy - ydz = A,$$

$$xdz - zdx = B,$$

$$ydx - xdy = C,$$

означая чрезъ A, B, C произвольныя постоянныя. Затѣмъ умножая полученные интегралы, по порядку ихъ, на x, y, z и складывая получимъ

$$Ax + By + Cz = 0.$$

И такъ геодезическая линія проведенная на поверхности сферы лежитъ въ плоскости проходящей чрезъ центръ сферы, то есть всегда бываетъ дугою большаго круга.

Геодезической линіи принадлежитъ общее свойство, для всякой поверхности, которое состоитъ въ томъ, что плоскость кривизны ея бываетъ перпендикулярна къ плоскости касательной, для той же точки на поверхности. Въ самомъ дѣлѣ, уравненіе плоскости проходящей чрезъ данную на поверхности точку x, y, z напишется

$$Z - z = a(X - x) + b(Y - y),$$

гдѣ a, b неопредѣленные постоянныя; X, Y, Z координаты общей точки на плоскости. Если та же плоскость проходитъ еще чрезъ двѣ точки на поверхности, опредѣленные координатами $x + dx, y + dy, z + dz$ и $x + dx + d(x + dx), y + dy + d(y + dy), z + dz + d(z + dz)$, то получимъ еще два уравненія

$$dz = adx + bdy$$

$$d^2z = ad^2x + bd^2y$$

Если значенія a и b , взятые отсюда,

$$a = \frac{dz d^2y - dy d^2z}{dx d^2y - dy d^2x}$$

$$b = \frac{dx d^2z - dz d^2x}{dx d^2y - dy d^2x}$$

вставимъ въ общее уравненіе плоскости, то получимъ уравненіе плоскости кривизны

$$(X - x)(dz d^2y - dy d^2z) + (Y - y)(dx d^2z - dz d^2x) + (Z - z)(dy d^2x - dx d^2y) = 0$$

Съ другой стороны, уравненія плоскости касательной въ точкѣ x, y, z на поверхности данной уравненіемъ $F(x, y, z) = 0$, будетъ

$$(X - x) \frac{dF}{dx} + (Y - y) \frac{dF}{dy} + (Z - z) \frac{dF}{dz} = 0$$

Косинусъ наклоненія двухъ плоскостей будетъ пропорціоналенъ суммѣ

$$(dz d^2y - dy d^2z) \frac{dF}{dx} + (dx d^2z - dz d^2x) \frac{dF}{dy} + (dy d^2x - dx d^2y) \frac{dF}{dz},$$

которая въ слѣдствіе общихъ уравненій геодезической линіи, и будучи представлена подѣ видомъ

$$\left[\frac{dF}{dx} d^2y - \frac{dF}{dy} d^2x \right] dz + \left[\frac{dF}{dz} d^2x - \frac{dF}{dx} d^2z \right] dy + \left[\frac{dF}{dy} d^2x - \frac{dF}{dz} d^2y \right] dx,$$

приводится къ нулю. И такъ плоскость кривизны геодезической линіи бываетъ во всякой точкѣ на данной поверхности перпендикулярна къ касательной плоскости. На этомъ свойствѣ основывается самый способъ проведенія геодезической линіи.

§ IX.

Задача. Найти плоскую и замкнутую кривую, которая бы при данной длинѣ ограничивала наибольшую площадь.

Сообразно съ содержаніемъ задачи, должно пользоваться по-

лярными координатами r и θ , которыхъ начало будемъ предполагать внутри кривой; выраженіе данной длины l будетъ

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2} = l$$

и выраженіе искомой площади $\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 d\theta$; слѣдовательно по условію изопериметрической задачи имѣемъ уравненіе

$$\delta \cdot \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} r^2 + \lambda \sqrt{r^2 + r'^2} \right) d\theta = 0,$$

гдѣ λ означаетъ неопредѣленную постоянную и $r' = \frac{dr}{d\theta}$.

Но если для сокращенія полагаемъ

$$\frac{1}{2} r^2 + \lambda \sqrt{r^2 + r'^2} = U,$$

то будетъ

$$\frac{dU}{dr} = r + \frac{\lambda r}{\sqrt{r^2 + r'^2}},$$

$$\frac{dU}{dr'} = \frac{\lambda r'}{\sqrt{r^2 + r'^2}},$$

$$dU = \frac{dU}{dr} dr + \frac{dU}{dr'} dr',$$

притомъ $dr = r' d\theta$; и какъ по общей теоріи изопериметрическихъ кривыхъ (§ VII) должно полагать

$$\frac{dU}{dr} - \frac{d \cdot \frac{dU}{dr'}}{d\theta} = 0,$$

то получимъ

$$dU = \frac{d \cdot \frac{dU}{dr'}}{d\theta} r' d\theta + \frac{dU}{dr'} dr' = d \left(r' \frac{dU}{dr'} \right),$$

откуда по интегрированіи

$$U = r' \frac{dU}{dr'} + \beta,$$

означая чрезъ β постоянное отъ интегрированія.

Если вставимъ значенія U и $\frac{dU}{dr}$, то получимъ

$$\frac{1}{2} r^2 - \beta = - \frac{\lambda r^2}{\sqrt{r^2 + r'^2}},$$

откуда

$$r'^2 = r^2 \left\{ \frac{\lambda^2 r^2}{(\frac{1}{2} r^2 - \beta)^2} - 1 \right\}$$

и слѣдовательно

$$d\theta = \frac{(r^2 - 2\beta) dr}{r \sqrt{4\lambda^2 r^2 - (r^2 - 2\beta)^2}}$$

Но функцію $4\lambda^2 r^2 - (r^2 - 2\beta)^2$ можно представить подъ видомъ $(h^2 - r^2)(r^2 - k^2)$, для этого стоитъ полагать

$$4(\lambda^2 + \beta) = h^2 + k^2, \quad 4\beta^2 = h^2 k^2$$

И такъ будетъ

$$d\theta = \frac{(r^2 + kh) dr}{r \sqrt{(h^2 - r^2)(r^2 - k^2)}},$$

принимая предъ kh знакъ плюсъ, чтобы значеніе $d\theta$ не дѣлалось нулемъ ни для какого значенія r . Теперь полагая $h^2 - r^2 = u^2(r^2 - k^2)$, получимъ

$$r^2(1 + u^2) = h^2 + k^2 u^2$$

$$dr = - \frac{(r^2 - k^2) u du}{r(r + u^2)}$$

и затѣмъ

$$d\theta = \frac{(r^2 + kh) du}{r^2(1 + u^2)} = \frac{du}{1 + u^2} + \frac{kh \cdot du}{h^2 + k^2 u^2},$$

откуда по интегрированіи

$$\theta = \text{arc. tang.}(u) + \text{arc. tang.}\left(\frac{ku}{h}\right)$$

или уравненіе обратное

$$\text{tang. } \theta = \frac{h + ku}{h - ku^2},$$

и по вставленіи значенія u

$$\text{tang. } \theta = \frac{\sqrt{(h^2 - r^2)(k^2 - r^2)}}{hk - r^2}$$

Мы не пишемъ постоянной отъ интегрированія, предполагая

$\theta = u = 0$ для $r = h$. Предыдущее уравнение можно еще написать подъ видомъ

$$r^4 - 2hk.r^2 + h^2 k^2 = (h - k)^2 r^2 \cos^2 \theta$$

или еще

$$[r^2 - hk - (h - k)r \cos \theta][r^2 - hk + (h - k)r \cos \theta] = 0$$

или наконецъ

$$r^2 - (h - k)r \cos \theta + \frac{1}{4}(h - k)^2 = \frac{1}{4}(h + k)^2,$$

замѣчая что имѣемъ по условію $r = h$, при $\theta = 0$.

И такъ кривая ограничивающая самую большую площадь есть кругъ, котораго радіусъ равенъ $\frac{1}{2}(h + k)$ и центръ отстоитъ отъ начала координатъ на $\frac{1}{2}(h - k)$.

Если ту же задачу выражаемъ въ прямоугольныхъ координатахъ x, y , то выраженіе площади ограниченной осью абсциссъ, дугою кривой и двумя ординатами y_1, y_2 , соответствующими абс-

циссамъ x_1, x_2 , будетъ $\int_{x_1}^{x_2} y dx$, выраженіе дуги $\int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1 + y'^2} = l$; следовательно по условію для minimum получимъ

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} (y + \lambda \sqrt{1 + y'^2}) dx = 0,$$

что даетъ общее уравненіе

$$1 - \frac{d}{dx} \frac{\lambda y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = 0,$$

откуда по первомъ интегрированіи

$$\lambda y' = (x - \alpha) \sqrt{1 + y'^2}, \text{ или } \frac{dy}{dx} = \frac{(x - \alpha) dx}{\sqrt{\lambda^2 - (x - \alpha)^2}},$$

и по второмъ интегрированіи

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \lambda^2.$$

Очевидно, что произвольныя постоянныя λ, α, β представляютъ радіусъ и координаты центра круга; значеніе ихъ опредѣляется изъ уравненій

$$(x_1 - \alpha)^2 + (y_1 - \beta)^2 = \lambda^2$$

$$(x_2 - \alpha)^2 + (y^2 - \beta)^2 = \lambda^2$$

$$\frac{1}{2} l = \lambda \operatorname{arc. sin.} \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \right\},$$

гдѣ x_1, x_2, y_1, y_2 и l предполагаются данными.

§ X.

Задача о Брахистохронѣ. Брахистохроною называется свободная въ пространствѣ, или проведенная на поверхности, такого свойства кривая, что движеніе матеріальной точки, подлежащей дѣйствию данныхъ силъ, совершается по этой кривой въ кратчайшее время. Напримѣръ, скорѣйшій скатъ тяжелаго тѣла изъ данной точки пространства въ другую данную точку совершается по брахистохронѣ. Рѣшеніемъ этой задачи занимались преимущественно Иванъ Бернуллі и Эйлеръ.

1. Положимъ, что движеніе начинается изъ точки определенной координатами a, b, c въ отношеніи прямоугольныхъ осей x, y, z и пусть дѣйствіе тяжести g происходитъ по направленію оси x . Если означимъ s длину кривой описанной точкою въ движеніи, при концѣ времени t , то выраженіе пріобрѣтенной скорости будетъ

$$\frac{ds^2}{dt^2} = 2g (x - a),$$

откуда

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2g (x - a)}},$$

и по условію задачи должно полагать

$$\delta \int_a^{x_1} \frac{ds}{\sqrt{2g (x - a)}} = 0$$

или, что все равно,

$$\delta \int_a^{x_1} \frac{dx \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}{\sqrt{2g (x - a)}} = 0,$$

замѣчая что

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad y' = \frac{dy}{dx}, \quad z' = \frac{dz}{dx}$$

Такъ какъ подъ знакомъ интеграла входятъ y и z , двѣ функціи отъ x , то получимъ два дифференціальныя уравненія

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2} \cdot \sqrt{2g(x-a)}} \right) = 0,$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2} \cdot \sqrt{2g(x-a)}} \right) = 0,$$

которыя можно написать еще такъ

$$d. \frac{dy}{ds \sqrt{x-a}} = 0, \quad d. \frac{dz}{ds \sqrt{x-a}} = 0$$

По интегрированіи получимъ

$$dy = A ds \sqrt{x-a},$$

$$dz = B ds \sqrt{x-a},$$

означая чрезъ A и B произвольныя постоянныя. Исключая изъ предыдущихъ уравненій ds , получимъ

$$B dy - A dz = 0,$$

и по второмъ интегрированіи

$$By - Az = C$$

Это уравненіе показываетъ, что проэктіа искомой кривой на плоскость yz есть прямая; слѣдовательно свободная брахистохрона представляетъ линію въ плоскости. Относя кривую на плоскость координатъ x, y , будетъ

$$dy = A ds \sqrt{x-a}, \quad dx^2 + dy^2 = ds^2$$

откуда по исключеніи ds получимъ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{A \sqrt{x-a}}{\sqrt{1 - A^2(x-a)}}$$

что можно еще написать

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{(D - 2(x-a)) - D}{2 \sqrt{D(x-a) - (x-a)^2}},$$

дѣлая $\frac{1}{A} = \sqrt{D}$. По интегрированіи получимъ уравненіе циклоиды

$$y + \text{const.} = \frac{1}{2} D \text{ arc. cos} \left(1 - \frac{2(x-a)}{D} \right) - \sqrt{D(x-a) - (x-a)^2}$$

Дифференціальное уравненіе кривой приводится къ простѣйшему виду, полагая $a = 0$, что даетъ

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{D-x}{x}}$$

2. Разсмотримъ теперь задачу о брахистохронѣ въ общемъ видѣ, то есть движеніе точки, будемъ предполагать на данной поверхности и при дѣйствіи на нее силъ изъ данныхъ центровъ. Пусть X, Y, Z представляютъ составныя отъ разложенія, по направлению прямоугольныхъ осей координатъ x, y, z , всѣхъ силъ дѣйствующихъ на матеріальную точку, которой положеніе въ пространствѣ, при концѣ времени t , опредѣляется координатами x, y, z . По предположенію нашему сумма $Xdx + Ydy + Zdz$ есть точный дифференціалъ нѣкоторой функціи $f(x, y, z)$; слѣдовательно по извѣстной теоремѣ Динамики будетъ

$$v^2 = 2 \int (Xdx + Ydy + Zdz) + C,$$

означая чрезъ v скорость пріобрѣтенную точкою въ движеніи, при концѣ времени t . Если вставимъ это значеніе v въ уравненіе

$$t = \int \frac{ds}{v}, \text{ гдѣ } ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \text{ то существенное условіе}$$

$$\text{задачи выразится уравненіемъ } \delta \int \frac{ds}{v} = 0.$$

Если точка въ движеніи предполагается свободною въ пространствѣ и координата x независимымъ переменнымъ, то варьируя предъидущій интегралъ приходимъ къ уравненіямъ

$$ds \frac{d \frac{1}{v}}{dy} - d \left(\frac{dy}{v ds} \right) = 0, \quad (a)$$

$$ds \frac{d \frac{1}{v}}{dz} - d \left(\frac{dz}{v ds} \right) = 0, \quad (b)$$

которыя представляютъ проэкціи кривой на двѣ плоскости координатъ. Уравненіе третьей проэкціи будетъ

$$ds \frac{d \frac{1}{v}}{dx} - d \left(\frac{dx}{v ds} \right) = 0. \quad (c)$$

Въ самомъ дѣлѣ, если складываемъ уравненія (c), (a), (b) по умноженіи ихъ на dx, dy, dz , то получимъ

$$ds. d \frac{1}{v} = dx. d \left(\frac{dx}{vds} \right) + dy. d \left(\frac{dy}{vds} \right) + dz. d \left(\frac{dz}{vds} \right) \\ = \frac{1}{vds} (dx d^2x + dy d^2y + dz d^2z) + ds^2 d \left(\frac{1}{vds} \right),$$

и какъ $dx d^2x + dy d^2y + dz d^2z = ds d^2s$, то будетъ

$$d \frac{1}{v} = \frac{d^2s}{vds} + ds d \left(\frac{1}{vds} \right) = d \left(\frac{ds}{vds} \right),$$

уравненіе тождественное.

Если кривая должна проходить на поверхности данной уравненіемъ $F(x, y, z) = 0$, то уравненія кривой будутъ (§ VI)

$$F(x, y, z) = 0,$$

$$\frac{ds \frac{d \frac{1}{v}}{dy} - d \left(\frac{dy}{vds} \right)}{\frac{dF}{dy}} = \frac{ds \frac{d \frac{1}{v}}{dz} - d \left(\frac{dz}{vds} \right)}{\frac{dF}{dz}}.$$

Ко второму уравненію можно прибавить равенство содержанія

$$\frac{ds \frac{d \frac{1}{v}}{dx} - d \left(\frac{dx}{vds} \right)}{\frac{dF}{dx}}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, если возьмемъ уравненія

$$ds \frac{d \frac{1}{v}}{dx} - d \left(\frac{dx}{vds} \right) = q \frac{dF}{dx}$$

$$ds \frac{d \frac{1}{v}}{dy} - d \left(\frac{dy}{vds} \right) = q \frac{dF}{dy}$$

$$ds \frac{d \frac{1}{v}}{dz} - d \left(\frac{dz}{vds} \right) = q \frac{dF}{dz}$$

и сложимъ ихъ по умноженіи перваго на dx , втораго на dy и третьяго на dz , то получимъ

$$ds \, d. \frac{1}{v} = dx \, d \left(\frac{dx}{v ds} \right) + dy \, d \left(\frac{dy}{v ds} \right) + dz \, d \left(\frac{dz}{v ds} \right),$$

замѣчая что

$$\frac{dF}{dx} dx + \frac{dF}{dy} dy + \frac{dF}{dz} dz = 0.$$

Но мы уже видѣли, что предъидущее уравненіе тождественно вѣрно.

Если точка въ движеніи, получивъ начальную скорость k , не подлежитъ дѣйствию никакихъ силъ, тогда брахистохрона приводится къ геодезической линіи, которой уравненія будутъ

$$v = k, \quad F(x, y, z) = 0,$$

$$\frac{d \frac{dx}{ds}}{\frac{dF}{dx}} = \frac{d \frac{dy}{ds}}{\frac{dF}{dy}} = \frac{d \frac{dz}{ds}}{\frac{dF}{dz}}.$$

3. Теорема. Если на данной поверхности $F(x, y, z) = 0$ проведемъ множество брахистохронъ, исходящихъ изъ одной точки A , и отсѣчемъ на нихъ дуги AM , AM' ,... описанныя точкою въ движеніи въ равныя времена, при равной начальной скорости, то рядъ точекъ MM' .. образуетъ кривую пересѣкающую подъ прямымъ угломъ всѣ брахистохроны. Или обратно: прямоугольная траекторія отсѣкаетъ дуги, въ системѣ брахистохронъ на данной поверхности, соотвѣтственно движенію точки въ равныя времена.

Доказательство. Всякой точкѣ M взятой на поверхности принадлежитъ одна брахистохрона AM и одна траекторія MM' , которыя можно взять за оси координатъ. Но длина дуги AM есть опредѣленная функція времени t ; дуга MM' есть опредѣленная функція угла φ , который образуютъ касательныя въ точкѣ A къ дугамъ AM и AM' ; слѣдовательно координаты всякой точки на поверхности можно разсматривать какъ функціи двухъ независимыхъ переменныхъ t и φ . Если означимъ ds и ds' бесконечно малыя дуги, Mm по направленію брахистохроны и Mm' по направленію траекторіи, то выраженіе косинуса угла между касательными проведенными къ этимъ дугамъ изъ точки M , будетъ

$$\frac{dx}{ds} \frac{dx}{ds'} + \frac{dy}{ds} \frac{dy}{ds'} + \frac{dz}{ds} \frac{dz}{ds'}$$

и какъ

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt} \frac{dt}{ds}, \quad \frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{ds}, \quad \frac{dz}{ds} = \frac{dz}{dt} \frac{dt}{ds}$$

$$\frac{dx}{ds'} = \frac{dx}{d\varphi} \frac{d\varphi}{ds'}, \quad \frac{dy}{ds'} = \frac{dy}{d\varphi} \frac{d\varphi}{ds'}, \quad \frac{dz}{ds'} = \frac{dz}{d\varphi} \frac{d\varphi}{ds'}$$

то получимъ

$$\left(\frac{dx}{dt} \frac{dx}{d\varphi} + \frac{dy}{dt} \frac{dy}{d\varphi} + \frac{dz}{dt} \frac{dz}{d\varphi} \right) \frac{dt}{ds} \frac{d\varphi}{ds'}$$

И такъ нужно доказать, что $S = 0$, означая

$$S = \frac{dx}{dt} \frac{dx}{d\varphi} + \frac{dy}{dt} \frac{dy}{d\varphi} + \frac{dz}{dt} \frac{dz}{d\varphi}$$

Дифференцируя это уравненіе въ отношеніи t , получимъ

$$\frac{dS}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \frac{dx}{d\varphi} + \frac{d^2y}{dt^2} \frac{dy}{d\varphi} + \frac{d^2z}{dt^2} \frac{dz}{d\varphi}$$

$$+ \frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{d\varphi dt} + \frac{dy}{dt} \frac{d^2y}{d\varphi dt} + \frac{dz}{dt} \frac{d^2z}{d\varphi dt},$$

и если дифференцируемъ въ отношеніи φ уравненіе

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 = v^2,$$

то будетъ еще

$$\frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{d\varphi dt} + \frac{dy}{dt} \frac{d^2y}{d\varphi dt} + \frac{dz}{dt} \frac{d^2z}{d\varphi dt} = v \frac{dv}{d\varphi},$$

и слѣдовательно

$$\frac{dS}{dt} = v \frac{dv}{d\varphi} + \frac{d^2x}{dt^2} \frac{dx}{d\varphi} + \frac{d^2y}{dt^2} \frac{dy}{d\varphi} + \frac{d^2z}{dt^2} \frac{dz}{d\varphi}$$

Съ другой стороны, уравненіе брахистохроны,

$$d \left(\frac{dx}{v ds} \right) - ds \frac{d \frac{1}{v}}{dx} + q \frac{dF}{dx} = 0,$$

иначе напишется

$$d \left(\frac{dx}{v^2 dt} \right) + \frac{ds}{v^2} \frac{dv}{dx} + q \frac{dF}{dx} = 0,$$

или еще

$$\left(\frac{d^2x}{v^2 dt^2} - \frac{2}{v^3} \frac{dx}{dt} \frac{dv}{dt} + \frac{1}{v} \frac{dv}{dx} \right) dt + q \frac{dF}{dx} = 0;$$

и другія два уравненія брахистохроны подобнымъ образомъ даютъ

$$\left(\frac{d^2 y}{v^2 dt^2} - \frac{2}{v^3} \frac{dy}{dt} \frac{dv}{dt} + \frac{1}{v} \frac{dv}{dy} \right) dt + q \frac{dF}{dy} = 0$$

$$\left(\frac{d^2 z}{v^2 dt^2} - \frac{2}{v^3} \frac{dz}{dt} \frac{dv}{dt} + \frac{1}{v} \frac{dv}{dz} \right) dt + q \frac{dF}{dz} = 0.$$

Если сложимъ эти уравненія, умноживъ по порядку ихъ на $\frac{dx}{d\varphi}$, $\frac{dy}{d\varphi}$, $\frac{dz}{d\varphi}$, то получимъ

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 x}{dt^2} \frac{dx}{d\varphi} + \frac{d^2 y}{dt^2} \frac{dy}{d\varphi} + \frac{d^2 z}{dt^2} \frac{dz}{d\varphi} \\ & - \frac{2dv}{v dt} \left(\frac{dx}{dt} \frac{dx}{d\varphi} + \frac{dy}{dt} \frac{dy}{d\varphi} + \frac{dz}{dt} \frac{dz}{d\varphi} \right) \\ & + v \left(\frac{dv}{dx} \frac{dx}{d\varphi} + \frac{dv}{dy} \frac{dy}{d\varphi} + \frac{dv}{dz} \frac{dz}{d\varphi} \right) = 0, \end{aligned}$$

замѣчая что

$$\frac{dF}{dx} \frac{dx}{d\varphi} + \frac{dF}{dy} \frac{dy}{d\varphi} + \frac{dF}{dz} \frac{dz}{d\varphi} = 0.$$

Отсюда въ слѣдствіе предъидущихъ уравненій имѣемъ

$$\frac{dS}{dt} - \frac{2dv}{v dt} S = 0,$$

и по интегрированіи $S = Kv^2$, означая чрезъ K произвольное постоянное. Но если предположимъ, что изъ точки A движеніе исходитъ по всѣмъ направленіямъ съ равною скоростію v_0 , то безконечно малыя дуги AM , AM' ,... описанныя въ безконечно малое время dt будутъ равны между собою и будутъ представлять радіусы весьма малаго круга, котораго окружность будетъ мѣстомъ первой траекторіи. И какъ здѣсь необходимо $S = 0$, то будетъ $K = 0$, то есть вообще $S = 0$, каково бы нибыло значеніе t .

Задача. Ограничить на данной поверхности кривою данной длины наибольшую площадь.

Въ предъидущей задачѣ мы видѣли, какъ удобны криволинейныя координаты для выраженія разстояній и направленій на кривой поверхности, теперь покажемъ употребленіе криволинейныхъ координатъ для выраженія площади. Выведемъ сначала одну формулу весьма важную по своимъ приложеніямъ въ теоріи поверхностей и кривыхъ линій въ пространствѣ. Для этого, проведемъ на данной поверхности систему кривыхъ линій, подобныхъ

между собою, на примѣръ геодезическихъ линій; и другую систему линій также подобныхъ между собою, на примѣръ рядъ траекторій прямоугольныхъ къ системѣ геодезическихъ линій. Если возьмемъ одну изъ траекторій за начало счета геодезическихъ дугъ и одну изъ геодезическихъ линій за начало счета дугъ траекторій, то положеніе всякой точки данной на поверхности можно опредѣлить дугами проходящихъ чрезъ нее траекторій и геодезической кривой. Пусть будутъ s геодезическая дуга и σ дуга траекторіи, соотвѣтствующія точкѣ опредѣленной прямоугольными координатами x, y, z . Переходя по геодезической дугѣ отъ точки x, y, z къ слѣдующей бесконечно близкой, мы измѣняемъ прямоугольныя координаты въ $x + dx, y + dy, z + dz$, и соотвѣтственно дугу s въ $s + ds$; между тѣмъ какъ σ остается безъ перемѣны. Если же переходимъ отъ точки x, y, z къ другой бесконечно близкой, по дугѣ траекторіи, то прямоугольныя координаты измѣняются въ $x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z$ и соотвѣтственно σ въ $\sigma + \delta \sigma$.

Возьмемъ теперь выраженіе элемента дуги s и условіе перпендикулярности геодезической системы къ траекторіямъ,

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$$

$$\frac{dx}{ds} \delta x + \frac{dy}{ds} \delta y + \frac{dz}{ds} \delta z = 0.$$

Если величины x, y, z измѣнимъ въ первомъ уравненіи на $\delta x, \delta y, \delta z$ и во второмъ на dx, dy, dz , то получимъ

$$dx \delta dx + dy \delta dy + dz \delta dz = ds \delta ds,$$

$$0 = \delta x d. \frac{dx}{ds} + \delta y d. \frac{dy}{ds} + \delta z d. \frac{dz}{ds} + \frac{dx}{ds} d\delta x + \frac{dy}{ds} d\delta y + \frac{dz}{ds} d\delta z$$

Вычитая одно уравненіе изъ другаго и замѣчая, что

$$d\delta x = \delta dx, d\delta y = \delta dy, d\delta z = \delta dz,$$

находимъ

$$\delta ds = - \delta x d. \frac{dx}{ds} - \delta y d. \frac{dy}{ds} - \delta z d. \frac{dz}{ds}$$

Проведемъ еще чрезъ точку x, y, z касательную по продолженію дуги σ и радіусъ кривизны подъ дугою s ; означимъ чрезъ λ, μ, ν углы первой линіи съ осями координатъ x, y, z и чрезъ α, β, γ углы радіуса кривизны съ тѣми же осями; по извѣстнымъ формуламъ аналитической геометріи получимъ

$$\cos \lambda = \frac{\delta x}{\delta \sigma}, \cos \mu = \frac{\delta y}{\delta \sigma}, \cos \nu = \frac{\delta z}{\delta \sigma}$$

$$\cos \alpha = \varrho \frac{d \frac{dx}{ds}}{ds}, \cos \beta = \varrho \frac{d \frac{dy}{ds}}{ds}, \cos \gamma = \varrho \frac{d \frac{dz}{ds}}{ds},$$

ϱ означаетъ длину радіуса кривизны. По вставленіи этихъ значеній предъидущее уравненіе даетъ

$$\delta ds = - \frac{ds \delta \sigma}{\varrho} (\cos \alpha \cos \lambda + \cos \beta \cos \mu + \cos \gamma \cos \nu)$$

или короче

$$\delta ds = - ds \delta \sigma \cdot \frac{\cos \theta}{\varrho},$$

означая чрезъ θ уголъ касательной по продолженію дуги σ съ направленіемъ линіи ϱ .

Положимъ теперь, что кривая данной длины l , ограничивающая на поверхности наибольшую площадь должна проходить чрезъ точки A и B данныя на другой кривой опредѣленнаго вида. Первое условіе задачи будетъ $\int ds = l$. Чтобы составить другое условіе, измѣнимъ безконечно мало положеніе дуги l , такъ чтобы криволинейныя и прямоугольныя между собою координаты s, σ точки M сдѣлались $s, \sigma + \delta \sigma$; значеніе площади получить также измѣненіе, которое выразится интеграломъ $\int \delta \sigma \cdot ds$; этотъ интегралъ по условію площади максимумъ должно полагать равнымъ нулю. И такъ будетъ

$$\delta \cdot \int ds = 0, \delta \cdot \int_0^l \delta \sigma \cdot ds = 0$$

Первое условіе по доказанной формулѣ даетъ $\int_0^l \delta \sigma \cdot \frac{\cos \theta}{\varrho} ds = 0$;

если же полагаемъ $\int_0^s \delta \sigma \cdot ds = \varphi(s)$, то необходимо будетъ

$\varphi(0) = 0, \varphi(l) = 0$ и также $\delta \sigma = \frac{d\varphi(s)}{ds}$. Если вставимъ это значеніе $\delta \sigma$ во второе условіе, то получимъ

$$\int_0^l \frac{d\varphi(s)}{ds} \cdot \frac{\cos \theta}{\varrho} ds = 0$$

или интегрируя по частямъ

$$\int_0^l \varphi(s) d \left(\frac{\cos \theta}{\varrho} \right) = 0,$$

и какъ здѣсь функція $\varphi(s)$ остается произвольною, то должно полагать

$$d. \frac{\cos \theta}{\rho} = 0, \text{ или } \cos \theta = C\rho,$$

означая чрезъ C произвольное постоянное. И такъ кривой ограничивающей на данной поверхности площадь максимум принадлежит то свойство, что радиусъ кривизны, въ каждой точкѣ кривой, бываетъ пропорціоналенъ косинусу угла, который составляютъ между собою плоскость круга кривизны и плоскость касательная проведенная чрезъ ту же точку поверхности.

ИЗЛОЖЕНІЕ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ

DE MAXIMIS ET MINIMIS.

§ XI.

Лагранжъ разсмотрѣлъ задачу *de maximis et minimis* для функцій со многими переменными. И какъ случаю съ двумя независимыми переменными принадлежитъ геометрическое значеніе, то мы займемся этимъ случаемъ сначала, а потомъ изложимъ общую теорію. Пусть $z = f(x, y)$ представляетъ уравненіе кривой поверхности отнесенной къ прямоугольнымъ осямъ координатъ x, y, z . Чтобы найти значеніе z максимум или минимум, можно разсматривать сначала x даннымъ и предполагать переменнымъ только y . Въ геометрическомъ смыслѣ, это значитъ взять сѣченіе данной поверхности съ плоскостію перпендикулярною къ оси x . Относительный максимум или минимум z опредѣлится изъ условій

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = 0, \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) < 0, \text{ для максим.}$$

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) > 0, \text{ для миним.}$$

Если изъ перваго опредѣлимъ y въ функціи отъ x , напри-
мѣръ $y = \varphi(x)$, и вставимъ это значеніе въ уравненіе поверхности, то получимъ $z = f(x, \varphi(x))$.

Остается сравнить относительное значеніе z при различныхъ x , чтобы получить совершенный максимум или минимум. Для этого должно дифференцировать послѣднее уравненіе, или что все равно, дифференцировать первоначальное выраженіе z въ отношеніи x , разсматривая y какъ функцію отъ x опредѣленную уравненіемъ $\frac{dz}{dy} = 0$. Это доставитъ намъ три слѣдующихъ условія

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) + y' \left(\frac{dz}{dy}\right) = 0, \quad \left(\frac{dz}{dy}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + 2y' \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) + y'^2 \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) + y'' \left(\frac{dz}{dy}\right) < 0, \text{ для max.}$$

$$> 0, \text{ для min.}$$

въ которыхъ означаемъ y' и y'' первую и вторую производныя функции $\varphi(x)$. Первое и второе уравненія, взятые въ совокупности, даютъ два независимыя между собою условія и общія для случаевъ максимум и минимум, то есть

$$\frac{dz}{dx} = 0, \quad \frac{dz}{dy} = 0;$$

последнее изъ нихъ по дифференцированіи даетъ

$$y' = - \frac{\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)}{\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)}$$

Вставляя это значеніе y' въ третье изъ предыдущихъ условій, и отбрасывая членъ содержащій $\frac{dz}{dy}$, получимъ

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) - 2 \frac{\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2}{\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)} + \frac{\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2}{\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)} < 0, \text{ для max.}$$

$$> 0, \text{ для min.}$$

Но мы имѣли также

$$\frac{d^2z}{dx^2} < 0, \text{ для max.}$$

$$\frac{d^2z}{dy^2} > 0, \text{ для min.}$$

Если умножимъ эти неравенства, одно на другое, то получимъ одно общее условіе для случаевъ максимум и минимум

$$\frac{d^2z}{dx^2} \cdot \frac{d^2z}{dy^2} - \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2 > 0$$

И такъ значеніе максимум или минимум функции $z = f(x, y)$ определяется по условіямъ

$$\frac{dz}{dx} = 0, \quad \frac{dz}{dy} = 0, \quad \frac{d^2z}{dy^2} > 0 \text{ для min.}$$

$$< 0 \text{ для max.}$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} \cdot \frac{d^2z}{dy^2} - \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2 > 0.$$

Если же послѣднее условіе не будетъ выполнено, то есть выраженіе $\frac{d^2z}{dx^2} \cdot \frac{d^2z}{dy^2} - \left(\frac{d^2z}{dx dy}\right)^2$ будетъ равно нулю или отрицательно, то функціи не можетъ принадлежать ни maximum, ни minimum. И въ самомъ дѣлѣ, уравненіе

$$\frac{d^2z}{dx^2} \cdot \frac{d^2z}{dy^2} - \left(\frac{d^2z}{dx dy}\right)^2 = 0$$

принадлежитъ поверхностямъ разгибаемымъ въ плоскость, которыя по направленію производящей прямой не представляютъ ни выпуклости, ни вогнутости. И если плоское сѣченіе, проведенное чрезъ данную точку на кривой поверхности, даетъ кривую выпуклую при одномъ направленіи плоскости, и кривую вогнутую при другомъ направленіи плоскости, то ордината z данной точки не можетъ быть названа ни maximum, ни minimum.

Возьмемъ теперь функцію со многими независимыми переменными, какова на примѣръ

$$f(x, y, z \dots t) = U$$

Если величины $x, y, z \dots$ соотвѣтствуютъ значеніямъ maximum или minimum функціи U , то необходимо

$$f(x + p, y + q, z + r, \dots) - f(x, y, z \dots) \begin{cases} < 0 \text{ для maximum} \\ > 0 \text{ для minimum} \end{cases}$$

сколько бы малы ни были приращенія $p, q, r \dots$ переменныхъ $x, y, z \dots$. И какъ условіе непрерывности функціи существенно для случаевъ max. или min., то разложеніе перваго члена въ Тайлерову строку вообще имѣетъ мѣсто. Если означимъ чрезъ R остатокъ строки, начиная съ членовъ третьяго измѣренія въ отношеніи $p, q, r \dots$, то получимъ

$$\begin{aligned} & p \frac{dU}{dx} + q \frac{dU}{dy} + r \frac{dU}{dz} \dots \\ & + \frac{1}{2} p^2 \frac{d^2U}{dx^2} + pq \frac{d^2U}{dx dy} + \frac{1}{2} q^2 \frac{d^2U}{dy^2} + pr \frac{d^2U}{dx dz} + qr \frac{d^2U}{dy dz} + \frac{1}{2} r^2 \frac{d^2U}{dz^2} \dots \\ & + R < 0, \text{ для max.} \\ & > 0, \text{ для min.} \end{aligned}$$

Предполагая $p, q, r \dots$ безконечно малыми, это условіе приводится сначала къ слѣдующему

$$p \frac{dU}{dx} + q \frac{dU}{dy} + r \frac{dU}{dz} \dots \begin{cases} < 0, \text{ для max.} \\ > 0, \text{ для min.} \end{cases}$$

которое для произвольныхъ, хотя и бесконечно малыхъ $p, q, r..$ не можетъ быть удовлетворено иначе, какъ полагая равными нулю коэффициенты при каждой произвольной, то есть

$$\frac{dU}{dx} = 0, \quad \frac{dU}{dy} = 0, \quad \frac{dU}{dz} = 0.. \quad (1)$$

За тѣмъ, по условію задачи останется неравенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} p^2 \frac{d^2 U}{dx^2} + pq \frac{d^2 U}{dx dy} + \frac{1}{2} q^2 \frac{d^2 U}{dy^2} + pr \frac{d^2 U}{dx dz} + qr \frac{d^2 U}{dy dz} \\ + \frac{1}{2} r^2 \frac{d^2 U}{dz^2} < 0, \text{ max.} \\ > 0, \text{ min.} \end{aligned} \quad (2)$$

Еслибы вторыя производныя функція U уничтожились вмѣстѣ съ первыми, тогда должно уравнивать нулю производныя третьяго порядка и различать случаи для maximum или minimum по знаку членовъ четвертаго порядка. Такимъ образомъ задача de maximis et minimis приводится къ тому, чтобы найти условія, когда функція вида

$$Ap^2 + Bpq + Cq^2 + Dpr + Eqr + Fr^2 + nr.$$

для данныхъ количествъ $A, B, C..$ и съ произвольными $p, q, r..$ бываетъ постоянно положительна, и когда отрицательна. Достаточно разсмотрѣть первый случай, потому что приписывая количествамъ $A, B, C..$ знакъ минусъ, мы переходимъ отъ перваго случая ко второму. Лагранжъ разрѣшилъ эту задачу слѣдующимъ образомъ.

Если предъидущій полиномъ никогда не долженъ имѣть отрицательнаго значенія, то значеніе его minimum будетъ положительно; и обратно, если найдемъ условія необходимыя для того чтобы значеніе minimum этого полинома было положительно, то отрицательныя значенія вообще не будутъ имѣть мѣста. Но условія для minimum, сначала по одной переменнѣй p , будутъ

$$2Ap + Bq + Dr + nr = 0, \quad A > 0.$$

Если значеніе p взятое отсюда вставимъ въ первоначальную функцію, то получимъ

$$Lq^2 + Mqr + Nr^2 + nr.$$

полагая для сокращенія

$$L = C - \frac{B^2}{4A}, \quad M = E - \frac{BD}{2A}, \quad N = F - \frac{D^2}{4A} \text{ и пр.}$$

Теперь условія minimum по переменнѣй q будутъ

$$2Lq + Mr + nr = 0, \quad L > 0;$$

и если значеніе q вставимъ въ преобразованную функцію, то получимъ $Tr^2 + np.$ гдѣ $T = N - \frac{M^2}{4L}$, и условія для minimum

$$2Tr + np. = 0, \quad T > 0.$$

Поступая подобнымъ образомъ до послѣдней переменнѣй, получимъ всѣ условія доставляющія предъидущему полиному положительное значеніе minimum; онѣ будутъ

$$A > 0, \quad L > 0, \quad T > 0 \text{ и пр.}$$

замѣчая, что вмѣсто втораго неравенства можно писать

$$4AC - B^2 > 0$$

и вмѣсто третьяго будетъ

$$(4AC - B^2)(4AF - D^2) - (2AE - BD)^2 > 0.$$

Возвращаясь къ выраженію (2), должно вставить значенія

$$A = \frac{1}{2} \frac{d^2 U}{dx^2}, \quad B = \frac{d^2 U}{dx dy}, \quad C = \frac{1}{2} \frac{d^2 U}{dy^2}$$

$$D = \frac{d^2 U}{dx dz}, \quad E = \frac{d^2 U}{dy dz}, \quad F = \frac{1}{2} \frac{d^2 U}{dz^2}$$

и по предъидущимъ условіямъ получимъ

$$\frac{d^2 U}{dx^2} > 0, \quad \frac{d^2 U}{dx^2} \cdot \frac{d^2 U}{dy^2} - \left(\frac{d^2 U}{dx dy} \right)^2 > 0,$$

$$\left\{ \frac{d^2 U}{dx^2} \frac{d^2 U}{dy^2} - \left(\frac{d^2 U}{dx dy} \right)^2 \right\} \left\{ \frac{d^2 U}{dx^2} \frac{d^2 U}{dz^2} - \left(\frac{d^2 U}{dx dz} \right)^2 \right\}$$

$$- \left\{ \frac{d^2 U}{dx^2} \frac{d^2 U}{dy dz} - \frac{d^2 U}{dx dy} \cdot \frac{d^2 U}{dx dz} \right\}^2 > 0 \text{ и пр.}$$

Изслѣдованіе дѣлается еще сложнѣе, если члены втораго измѣренія уничтожаются, и должно судить по условіямъ для членовъ четвертаго порядка.

§ XII.

При рѣшеніи задачъ зависящихъ отъ maximum или minimum

интеграла $\int_{x_1}^{x_2} U dx$ пользуются уравненіемъ $\delta \int_{x_1}^{x_2} U dx = 0$, причемъ признакомъ max. или min. искомой функціи будетъ

$$\delta^2 \cdot \int_{x_1}^{x_2} U dx \begin{cases} < 0, \text{ для max.} \\ > 0, \text{ для min.} \end{cases}$$

Во всѣхъ задачахъ предложенныхъ выше, мы разсматривали измѣненіе опредѣленнаго интеграла въ самомъ общемъ видѣ, варируя подъ знакомъ интеграла, какъ функцію U по всѣмъ ея переменнымъ, такъ и dx . Но въ задачахъ собственно геометрическихъ такого полного измѣненія функціи не требуется, такъ что координату x можно оставить безъ варіаціи; потому что кривую можно выгнуть желаемымъ образомъ, варируя только ординату ея. И такъ, чтобы по возможности упростить задачу *de maximis et minimis*, ограничимся предположеніемъ $\delta x = 0$. Слѣдовательно, признаки для max. или min. будутъ

$$\int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{1}{2} \frac{d^2 U}{dy^2} \delta y^2 + \frac{d^2 U}{dy dy'} \delta y \delta y' + \frac{1}{2} \frac{d^2 U}{dy'^2} \delta y'^2 + \dots \frac{1}{2} \frac{d^2 U}{dy^{(n)^2}} \delta y^{(n)^2} \right\} dx$$

$$\begin{cases} > 0, \text{ для min.} \\ < 0, \text{ для max.} \end{cases}$$

Еслибы здѣсь $\delta y, \delta y', \delta y'' \dots$ были функціями совершенно независимыми одна отъ другой, то предъидущему неравенству можно бы удовлетворить такими же точно условіями, какія Лагранжъ нашелъ для функцій со многими переменными, не находящимися подъ знакомъ интегрированія, то есть значеніями $\delta y, \delta y', \dots$ доставляющими полиному

$$\frac{d^2 U}{dy^2} \delta y^2 + 2 \frac{d^2 U}{dy dy'} \delta y \delta y' \dots \frac{d^2 U}{dy_n^2} \delta y_n^2$$

значеніе постоянно положительное или отрицательное. Но какъ функціи $\delta y, \delta y' \dots$ находятся во взаимной зависимости, то нѣкоторыя изъ найденныхъ показаннымъ образомъ условій могутъ не имѣть мѣста, и однако же интегралъ сохранить постоянно свой знакъ. Лежандръ первый замѣтилъ эту необходимость привести рѣшеніе къ самому меньшему числу условій. Способъ Лежандра заключается въ слѣдующемъ.

Если къ предъидущему интегралу придадимъ функцію

$$\lambda_1 \delta y^2 + \lambda_2 \delta y'^2 + \dots \lambda_n \delta y^{(n-1)^2} + 2(\lambda_{n+1} \delta y \delta y' + \lambda_{n+2} \delta y \delta y'' + \dots)$$

и введемъ ее подъ знакъ интегрированія, то всегда можно для функцій $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ найти такія значенія, при которыхъ элементъ интеграла напишется подъ видомъ

$$\frac{d^2 U}{dy^{(n)^2}} P^2 dx,$$

за тѣмъ, условіе для max. или min интеграла $\int_{x_1}^{x_2} U dx$ приводится къ простѣйшему виду

$$\frac{d^2 U}{dy^{(n)^2}} < 0 \text{ для max.}, \quad \frac{d^2 U}{dy^{(n)^2}} > 0 \text{ для min.}$$

Въ самомъ дѣлѣ, значеніе интеграла

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{d^2 U}{dy^2} \delta y^2 + 2 \frac{d^2 U}{dy dy'} \delta y \delta y' + \frac{d^2 U}{dy'^2} \delta y'^2 + \dots + \frac{d^2 U}{dy^{(n)^2}} \delta y^{(n)^2} \right) dx$$

неизмѣнится, если придадимъ къ нему

$$\int_{x_1}^{x_2} dR = R_2 - R_1,$$

гдѣ R_2 и R_1 представляютъ значеніе функціи R для $x = x_2$ и $x = x_1$. Но если R означаетъ предъидущую Лежандрову функцію, то получимъ

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \left(\frac{d^2 U}{dy^2} + \lambda'_1 \right) \delta y^2 + 2 \delta y \delta y' \left(\frac{d^2 U}{dy dy'} + \lambda_1 + \lambda'_{n+1} \right) \right. \\ \left. + \delta y'^2 \left(\frac{d^2 U}{dy'^2} + \lambda'_2 + 2\lambda_{n+1} \right) \right. \\ \left. + 2 \delta y \delta y'' \left(\frac{d^2 U}{dy dy''} + \lambda_{n+1} + \lambda'_{n+2} \right) \right. \\ \left. + \dots + \frac{d^2 U}{dy^{(n)^2}} \delta y^{(n)^2} \right\} dx = [R_2 - R_1], \end{aligned}$$

здѣсь означаютъ $\lambda' = \frac{d\lambda}{dx}$, $\lambda'_1 = \frac{d\lambda_1}{dx}$, ...

По предположенію Лежандра, функцію

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d^2 U}{dy^2} + \lambda'_1 \right) \delta y^2 + 2 \delta y \delta y' \left(\frac{d^2 U}{dy dy'} + \lambda_1 + \lambda'_{n+1} \right) \\ & + \delta y'^2 \left(\frac{d^2 U}{dy'^2} + \lambda'_2 + 2 \lambda_{n+1} \right) \\ & + 2 \delta y \delta y'' \left(\frac{d^2 U}{dy dy''} + 2 \lambda_{n+1} + \lambda'_{n+2} \right) + \text{пр.} \end{aligned}$$

можно уравнивать полному квадрату

$$(\alpha \delta y + \alpha_1 \delta y' + \alpha_2 \delta y'' \dots + \alpha_n \delta y^{(n)})^2$$

Такое предположение должно почитать возможнымъ, если оно содержитъ достаточное число уравненийъ для опредѣленія всѣхъ функций α и всѣхъ λ . Но число различныхъ α есть $n + 1$, число различныхъ λ есть

$$n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \text{ или } \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2},$$

слѣдовательно число всѣхъ произвольныхъ функцийъ будетъ

$$n + 1 + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} = \frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2}$$

Съ другой стороны, число различныхъ условныхъ уравненийъ, которыя можно получить въ слѣдствіе нашего предположенія, должно быть равно числу различныхъ варіаціоновъ и произведеній ихъ по два; но первыхъ $n + 1$, вторыхъ $\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$, слѣдовательно всѣхъ условныхъ уравненийъ снова будетъ

$$\frac{(n+2)(n+1)}{1 \cdot 2}$$

И такъ Лежандрово предположеніе справедливо. Чтоже касается до члена дополнительнаго $R_2 - R_1$, то мы ограничимся тѣмъ предположеніемъ, что функции $y, y', y'' \dots y^{(n-1)}$ должны быть постоянны для той и другой границъ интеграла, то есть примемъ

$$\begin{aligned} \delta y_1 &= 0, \delta y'_1 = 0, \delta y''_1 = 0 \dots \delta y^{(n-1)}_1 = 0 \\ \delta y_2 &= 0, \delta y'_2 = 0, \delta y''_2 = 0 \dots \delta y^{(n-1)}_2 = 0 \end{aligned}$$

и слѣдовательно $R_2 - R_1 = 0$. Теперь будетъ

$$\left(\frac{d^2 U}{dy^2} + \lambda'_1 \right) \delta y^2 + \dots \frac{d^2 U}{dy^n} \delta y^n = (\alpha \delta y + \alpha_1 \delta y' + \dots \alpha_n \delta y^{(n)})^2$$

Сравнивая въ этомъ уравненіи коэффициенты при δy^n , получимъ

$$a_n = \frac{d^2 U}{dy^{(n)^2}},$$

и какъ вторая часть уравненія можетъ быть представлена подъ видомъ $a_n P^2$, то и первой части можно доставить видъ $\frac{d^2 U}{dy^2} \cdot P^2$; за тѣмъ, условія для maximum и minimum будутъ

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{d^2 U}{dy^{(n)^2}} \cdot P^2 dx < 0 \text{ для max.} \\ > 0 \text{ для min.}$$

отсюда Лежандръ заключаетъ, что

$$\frac{d^2 U}{dy^{(n)^2}} < 0 \text{ для max., } \frac{d^2 U}{dy^{(n)^2}} > 0 \text{ для min.}$$

Заключение Лежандра объ одинаковости алгебраическаго зна-

ка интеграла $\int_{x_1}^{x_2} \frac{d^2 U}{dy^{(n)^2}} \cdot P^2 dx$ и функции $\frac{d^2 U}{dy^{(n)^2}}$ подвергалось нѣ-

которымъ возраженіямъ. Лагранжъ замѣтилъ, что положительные элементы не всегда даютъ положительный интегралъ, та-
ковъ, напримѣръ, интегралъ

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^2}.$$

Должно признаться, что въ этомъ возраженіи скрывается не точное понятіе объ опредѣленномъ интегралѣ. Лагранжъ подразумѣвалъ, что переходъ отъ неопредѣленнаго значенія интеграла къ опредѣленному вообще возможенъ, какъ скоро даются границы интегрированія. Но другіе геометры показали, что если элементъ интеграла получаетъ между границами интегрированія безконечное значеніе, то вычисленіе такихъ интеграловъ требуетъ особеннаго способа, и что противные знаки элемента съ значеніемъ самаго интеграла всегда указываютъ тотъ случай, когда имѣютъ мѣсто безконечные элементы. И такъ, чтобы воспользоваться способомъ Лежандра, сначала нужно опредѣлить всѣ функции λ , входящія въ составъ функции P , и удостовѣриться въ томъ, что элементъ инте-

грала $\int_{x_1}^{x_2} \frac{d^2 U}{dy^{(n)^2}} \cdot P^2 dx$ не дѣлается безконечнымъ между данными

границаим x_1, x_2 . Но опредѣленіе функцій λ сопряжено съ большимъ затрудненіемъ, даже въ самыхъ обыкновенныхъ случаяхъ.

Возьмемъ для примѣра интеграль

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y') dx$$

и положимъ для краткости $f(x, y, y') = V$. Слѣдую способу Лейбнера, къ интегралу $\delta^2 \int V dx$ придаемъ интеграль $\int d(\lambda_1 \delta y^2)$, въ слѣдствіе чего функція подъ знакомъ интегрированія приметъ видъ

$$\left(\frac{d^2 V}{dy^2} + \lambda_1' \right) \delta y^2 + 2 \left(\frac{d^2 V}{dy dy'} + \lambda_1 \right) \delta y \delta y' + \frac{d^2 V}{dy'^2} \delta y'^2,$$

за тѣмъ уравниваемъ эту функцію полному квадрату

$$\alpha^2 \delta y^2 + 2\alpha\alpha_1 \delta y \delta y' + \alpha_1^2 \delta y'^2,$$

откуда по сравненіи коэффиціентовъ при варіаціонахъ $\delta y^2, \delta y \delta y', \delta y'^2$ получимъ

$$\frac{d^2 V}{dy^2} + \lambda_1' = \alpha^2,$$

$$\frac{d^2 V}{dy dy'} + \lambda_1 = \alpha\alpha_1,$$

$$\frac{d^2 V}{dy'^2} = \alpha_1^2$$

Если исключимъ величину α_1 изъ уравненій второго и третьяго, то будетъ

$$\alpha = \left(\frac{d^2 V}{dy dy'} + \lambda_1 \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{d^2 V}{dy'^2}}};$$

и если вставимъ сюда значеніе α , взятое изъ уравненія перваго, то получимъ

$$\frac{d^2 V}{dy'^2} \left(\frac{d^2 V}{dy^2} + \lambda_1' \right) = \left(\frac{d^2 V}{dy dy'} + \lambda_1 \right)^2$$

Но не трудно видѣть, что предъидущее уравненіе не способно къ обыкновенному интегрированію, слѣдовательно опредѣленіе функцій λ , весьма затруднительно.

§ XIII.

Якоби успѣлъ привести условія для maximum и minimum къ такимъ дифференціальнымъ уравненіямъ, которыхъ рѣшеніе получается по извѣстнымъ способамъ. Знаменитый геометръ не разсудилъ изложить самаго доказательства, а потому многіе ученые математики старались доказать и развить плодovitую мысль Якоби. Изъ русскихъ математиковъ, Харьковскій Профессоръ Г. Соколовъ отличился развитіемъ этой задачи. Но записка Профессора Соколова представляетъ столько сложное вычисленіе, что не можетъ составить члена въ нашемъ курсѣ лекцій; а потому ограничимся изложеніемъ способа Якоби на простѣйшихъ случаяхъ.

Пусть U представляетъ функцію $f(x, y, y')$. Условія для maximum или minimum интеграла $\int_{x_1}^{x_2} U dx$ будутъ

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} U dx = 0, \quad \delta^2 \int_{x_1}^{x_2} U dx \begin{cases} > 0 \text{ для min.} \\ < 0 \text{ для max.} \end{cases}$$

Если предположимъ x и y постоянными при границахъ интеграла, то по первому условію, общему для maximum и minimum, будетъ

$$\frac{dU}{dy} - \frac{d. \left(\frac{dU}{dy'} \right)}{dx} = 0;$$

а по второму

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta \left\{ \frac{dU}{dy} - \frac{d. \frac{dU}{dy'}}{dx} \right\} \cdot \delta y dx \begin{cases} \geq 0, \text{ для min.} \\ \leq 0, \text{ для max.} \end{cases}$$

Если вставимъ сюда значенія

$$\delta \frac{dU}{dy} = \frac{d^2 U}{dy^2} \delta y + \frac{d^2 U}{dy dy'}, \delta y'$$

$$\delta \frac{d. \frac{dU}{dy'}}{dx} = \frac{d. \frac{d^2 U}{dy dy'}}{dx} \delta y + \frac{d^2 U}{dy dy'} \delta y' + \frac{d. \left(\frac{d^2 U}{dy'^2} \delta y' \right)}{dx},$$

то получимъ

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(m \delta y + \frac{d. n \delta y'}{dx} \right) \delta y dx \begin{cases} > 0, \text{ для min.} \\ < 0, \text{ для max.} \end{cases}$$

дѣлая для сокращенія

$$m = \frac{d^2 U}{dy^2} - \frac{d. \frac{d^2 U}{dy dy'}}{dx}, \quad n = - \frac{d^2 U}{dy'^2}$$

Пусть теперь уравненіе $y = \varphi(x, a, b)$ представляетъ общій интегралъ уравненія

$$\frac{dU}{dy} - \frac{d. \frac{dU}{dy'}}{dx} = 0.$$

Если дифференцируемъ послѣднее изъ нихъ въ отношеніи произвольной постоянной a , то получимъ

$$\frac{d^2 U}{dy^2} \frac{dy}{da} + \frac{d^2 U}{dy dy'} \frac{dy'}{da} - \frac{d. \left(\frac{d^2 U}{dy dy'} \cdot \frac{dy}{da} \right)}{dx} - \frac{d. \left(\frac{d^2 U}{dy'^2} \cdot \frac{dy'}{da} \right)}{dx} = 0,$$

и какъ

$$\frac{d. \left(\frac{d^2 U}{dy dy'} \cdot \frac{dy}{da} \right)}{dx} = \frac{d^2 U}{dy dy'} \cdot \frac{dy'}{da} + \frac{d. \frac{d^2 U}{dy dy'}}{dx} \cdot \frac{dy}{da},$$

то будетъ

$$m \frac{dy}{da} + \frac{d. n \frac{dy'}{da}}{dx} = 0,$$

и подобное уравненіе для произвольной постоянной b ,

$$m \frac{dy}{db} + \frac{d. n \frac{dy'}{db}}{dx} = 0$$

И такъ функція

$$u = A \frac{dy}{da} + B \frac{dy}{db},$$

съ новыми произвольными постоянными A и B , представляетъ общій интегралъ уравненія

$$m \delta y + \frac{d. n \delta y'}{dx} = 0$$

Значеніе δy въ интегралѣ

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(m \delta y + \frac{d. n \delta y'}{dx} \right) \delta y dx$$

совершенно произвольно; на примѣръ, можно полагать $\delta y = ut$, означая чрезъ t неопредѣленную функцію отъ x . Новое выраженіе интеграла будетъ

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(m u t + \frac{d. \left(n \frac{d. tu}{dx} \right)}{dx} \right) \cdot tu dx,$$

и какъ

$$u \frac{d. \left(n \frac{d. tu}{dx} \right)}{dx} = ut \frac{d. \left(n \frac{du}{dx} \right)}{dx} + \frac{d. \left(nu^2 \frac{dt}{dx} \right)}{dx},$$

при томъ же

$$mu + \frac{d. \left(n \frac{du}{dx} \right)}{dx} = 0,$$

то будетъ

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{d. \left(nu^2 \frac{dt}{dx} \right)}{dx} t dx$$

Интегрируя по частямъ, окончательно получимъ

$$\delta^2 \int_{x_1}^{x_2} U dx = - \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{dt}{dx} \right)^2 u^2 n dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{d^2 U}{dy'^2} u^2 \left(\frac{dt}{dx} \right)^2 dx$$

И такъ способъ Якоби приводитъ къ Лежандрову условію, но имѣетъ то преимущество, что элементъ интеграла можно испытать между границами x_1 , x_2 . Сравненіе двухъ способовъ приводитъ къ интегрированію дифференціальныхъ уравненій, для рѣшенія которыхъ до сего времени прямого способа не было извѣстно. Въ самомъ дѣлѣ, способъ Лежандра даетъ

$$\delta^2 \int_{x_1}^{x_2} U dx = \int_{x_1}^{x_2} (\alpha \delta y + \alpha_1 \delta y')^2 dx =$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{d^2 U}{dy'^2} \left\{ \left(\frac{d^2 U}{dy dy'} + \lambda_1 \right) \frac{\delta y}{\frac{d^2 U}{dy'^2}} + \delta y' \right\}^2 dx$$

Сравнивая это выражение съ предыдущимъ, получимъ

$$u^2 \left(\frac{dt}{dx} \right)^2 = \left\{ \left(\frac{d^2 U}{dy dy'} + \lambda_1 \right) \frac{\delta y}{\frac{d^2 U}{dy'^2}} + \delta y' \right\}^2,$$

и какъ
$$\frac{dt}{dx} = \frac{u \delta y' - \frac{du}{dx} \delta y}{u^2}, \quad \text{то будетъ}$$

$$\frac{u \delta y' - \frac{du}{dx} \delta y}{u} \cdot (1)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{d^2 U}{dy dy'} + \lambda_1 \right) \frac{\delta y}{\frac{d^2 U}{dy'^2}} + \delta y'$$

Это уравненіе существуетъ, каковы бы ни были варіаціоны δy , $\delta y'$; слѣдовательно можно сравнить коэффиціенты при δy , что доставить намъ

$$\lambda_1 = - \frac{d^2 U}{dy dy'} - \frac{d^2 U}{dy'^2} \cdot \frac{du}{dx},$$

то есть интеграль уравненія

$$\frac{d^2 U}{dy'^2} \left(\frac{d^2 U}{dy^2} + \lambda_1' \right) = \left(\frac{d^2 U}{dy dy'} + \lambda_1 \right)^2.$$

Если повѣряемъ послѣднее уравненіе предыдущимъ значеніемъ λ_1 , то получимъ сначала

$$\frac{d^2 U}{dy^2} - \frac{d}{dx} \frac{d^2 U}{dy dy'} - \frac{d}{dx} \left\{ \frac{d^2 U}{dy'^2} \frac{du}{dx} \right\} - \frac{d^2 U}{dy'^2} \frac{\left(\frac{du}{dx} \right)^2}{u^2} = 0,$$

или по сокращеніи

$$\frac{d^2 U}{dy^2} - \frac{d}{dx} \frac{d^2 U}{dy dy'} - \frac{1}{u} \frac{d}{dx} \left(\frac{d^2 U}{dy'^2} \frac{du}{dx} \right) = 0,$$

что по прежнему означенію дастъ, какъ и должно быть,

$$mu + \frac{d}{dx} \frac{du}{dx} = 0.$$

Общій способъ Якоби основывается на слѣдующихъ предположеніяхъ:

Первое. Посредствомъ интегрированія по частямъ, при постоянномъ значеніи количествъ при границахъ, интегралъ

$$\int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{d^2 U}{dy^2} \delta y^2 + 2 \frac{d^2 U}{dy dy'} \delta y \delta y' + \frac{d^2 U}{dy'^2} \delta y'^2 + \dots + \frac{d^2 U}{dy^{(n)^2}} \delta y^{(n)^2} \right\} dx$$

приводится къ виду

$$\int_{x_1}^{x_2} \left\{ A \delta y + \frac{d. A_1 \delta y'}{dx} + \frac{d^2 A_2 \delta y''}{dx^2} + \dots + \frac{d^n A_n \delta y^{(n)}}{dx^n} \right\} \delta y dx,$$

гдѣ $A, A_1 \dots A_n$ означаютъ извѣстныя выраженія, содержащія производныя функціи U .

Второе. Если $y = \varphi(x, a_1, a_2, a_3 \dots a_{2n})$, съ произвольными постоянными $a_1, a_2, \dots a_{2n}$ представляетъ общій интегралъ уравненія

$$\frac{dU}{dy} - \frac{d. dU}{dx dy'} + \frac{d^2 dU}{dx^2 dy''} - \dots + \frac{d^n dU}{dx^n dy^{(n)}} = 0,$$

то интегралъ уравненія

$$A \delta y + \frac{d. A_1 \delta y'}{dx} + \frac{d^2 A_2 \delta y''}{dx^2} + \dots + \frac{d^n A_n \delta y^{(n)}}{dx^n} = 0$$

будетъ
$$u = \alpha_1 \frac{d\varphi}{da_1} + \alpha_2 \frac{d\varphi}{da_2} + \dots + \alpha_{2n} \frac{d\varphi}{da_{2n}},$$

съ новыми постоянными $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_{2n}$

Третье. Если u представляетъ частное значеніе функціи y , опредѣленной уравненіемъ

$$Ay + \frac{d. A_1 y'}{dx} + \frac{d^2 A_2 y''}{dx^2} + \dots + \frac{d^n A_n y^{(n)}}{dx^n} = 0,$$

то выраженіе

$$\left\{ Auy + \frac{d. A_1 (uy)'}{dx} + \frac{d^2 A_2 (uy)''}{dx^2} + \dots + \frac{d^n A_n (uy)^{(n)}}{dx^n} \right\} \cdot u dx$$

будетъ полный дифференціалъ, и можетъ быть представленъ

$$d. \left[B_1 y' + \frac{d. B_2 y''}{dx} + \frac{d^2 B_3 y'''}{dx^2} + \dots + \frac{d^{n-1} B_n y^{(n)}}{dx^{n-1}} \right],$$

$B_1, B_2 \dots B_n$ выражаются посредствомъ функцій $u, A, A_1, \dots A_n$.

Примѣры. Для поясненія теоріи, по которой различаются случаи *max.* или *min.* въ задачахъ варіаціоннаго вычисленія, возьмемъ нѣкоторые примѣры.

1. Условіе кратчайшей линіи между двумя точками на плоскости выражается уравненіемъ

$$\delta \cdot \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1 + y'^2} = 0$$

Чтобы рѣшить по способу Лежандра, принадлежитъ-ли этой задачѣ *maximum* или *minimum*, должно взять вторую производную отъ функціи $\sqrt{1 + y'^2}$, въ отношеніи къ y' , и опредѣлить алгебраическій знакъ этой производной. Но значеніе второй производной въ настоящемъ случаѣ будетъ

$$\frac{1}{(1 + y'^2)^{3/2}},$$

что очевидно представляетъ количество положительное, слѣдовательно рѣшенію принадлежитъ случай *minimum*. Чтобы испытать ту же задачу по способу Якоби, должно сначала составить функцію $u = A \frac{dy}{da} + B \frac{dy}{db}$, взявъ значеніе $y = ax + b$, то есть будетъ

$$u = Ax + B, \quad \frac{du}{dx} = A$$

Значеніе интеграла

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{d^2 U}{dy'^2} u^2 \left(\frac{dt}{dx} \right)^2 dx$$

или, что все равно,

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{d^2 U}{dy'^2} \left(\delta y' - \frac{du}{dx} \cdot \frac{\delta y}{u} \right)^2 dx$$

будетъ

$$\frac{1}{(1 + a^2)^{3/2}} \cdot \int_{x_1}^{x_2} \left(\delta y' - \frac{A \delta y}{Ax + B} \right)^2 dx$$

Чтобы элементъ этого интеграла не имѣлъ безконечнаго значенія, между данными границами интегрированія, достаточно приписать постояннымъ A и B такія значенія, чтобы уравненіе $Ax + B = 0$ дѣлалось невозможнымъ между границами $x = x_1$ и $x = x_2$. И такъ значеніе интеграла вообще положительное.

2. Условіе для кривой ограничивающей самую большую площадь было

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta(y + \lambda \sqrt{1 + y'^2}) \cdot dx = 0,$$

и самое уравненіе кривой

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = \lambda^2$$

Испытывая это рѣшеніе по способу Якоби, имѣемъ

$$\frac{d^2 U}{dy'^2} = \frac{\lambda}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{dy}{da} = \frac{x - a}{y - b}, \quad \frac{dy}{db} = 1; \quad u = A \frac{x - a}{y - b} + B, \quad \frac{du}{dx} = \frac{A}{y - b}$$

и чтобы сократить наше разсужденіе по возможности, полагаемъ произвольное постоянное $A = 0$. Затѣмъ будетъ

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{d^2 U}{dy'^2} \left(\delta y' - \frac{du}{dx} \cdot \frac{\delta y}{u} \right)^2 dx = \lambda \int_{x_1}^{x_2} (\delta y')^2 \cdot \frac{dx}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}};$$

слѣдовательно случаи maximum или minimum зависятъ отъ знака $\pm$ предъ λ , то есть площадь съ выпуклою дугою круга будетъ maximum, и съ вогнутою дугою minimum.

ВАРИИРОВАНИЕ ОПРЕДЕЛЕННЫХЪ ИНТЕГРАЛОВЪ

СЪ ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМѢННЫМИ.

§ XIV.

Возьмемъ интеграль $W = \iint U dx dy$, въ которомъ U означаетъ данную функцію независимыхъ переменныхъ x, y , нѣкоторой функціи z тѣхъ же переменныхъ и частныхъ производныхъ $\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}, \frac{d^2 z}{dx^2}, \frac{d^2 z}{dx dy}, \frac{d^2 z}{dy^2}$ и пр. Границы интегрированія

будемъ предполагать данными посредствомъ двухъ уравненій $A = 0$, $B = 0$, изъ коихъ каждое способно доставить два или вообще четное число значеній y , въ функціяхъ отъ x .

Оставаясь вѣрными первоначальному опредѣленію варіаціона, мы будемъ разсматривать количества x, y нѣкоторыми функціями новыхъ переменныхъ u, v ; такъ чтобы варіаціоны, $\delta x, \delta y$ представлялись произвольными и бесконечно малыми функціями переменныхъ u, v . Возвращаясь къ первоначальнымъ переменнымъ, можно количества $\delta x, \delta y$ разсматривать произвольными и бесконечно малыми функціями отъ x, y . Варіаціонъ δz составляется изъ собственнаго варіаціона функціи z и двухъ приданныхъ, въ слѣдствіе приращеній $\delta x, \delta y$, такъ что будетъ

$$\delta z = \left(\frac{dz}{dx} \right) \delta x + \left(\frac{dz}{dy} \right) \delta y + \omega,$$

гдѣ ω означаетъ произвольную и бесконечно малую функцію переменныхъ x, y .

Знакъ варіированія въ кратныхъ интегралахъ, также какъ и въ простыхъ, можетъ быть перенесенъ подъ знакъ интеграла, то есть

$$\delta. \iint U dx dy = \iint \delta (U dx dy).$$

Чтобы доказать эту основную теорему, введемъ новыя переменныя u, v намѣсто x, y . По извѣстной формулѣ преобразованія въ кратныхъ интегралахъ получимъ

$$\iint U dx dy = \iint U \left(\frac{dx}{du} \frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv} \frac{dy}{du} \right) du dv$$

Но варіаціонныя измѣненія приписываются количествамъ x и y , какъ функціямъ переменныхъ u, v ; простые же переменныя u, v варіаціоновъ не имѣютъ; слѣдовательно будетъ

$$\begin{aligned} \delta. \iint U dx dy &= \iint du dv \left(\frac{dx}{du} \frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv} \frac{dy}{du} \right) \delta U \\ &+ \iint du dv. U \delta \left(\frac{dx}{du} \frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv} \frac{dy}{du} \right) \end{aligned}$$

Если означимъ чрезъ $\varphi(u, v)$ выраженіе функціи x и $\omega(u, v)$ выраженіе варіаціона функціи φ , то будетъ еще

$$\begin{aligned} \delta. \left(\frac{dx}{du} \right) &= \frac{\delta \varphi(u + du, v) - \delta \varphi(u, v)}{du} = \frac{\omega(u + du, v) - \omega(u, v)}{du} \\ &= \frac{d\omega(u, v)}{du} = \frac{d\delta x}{du} \end{aligned}$$

и подобнымъ образомъ

$$\delta \frac{dy}{du} = \frac{d\delta y}{du}, \quad \delta \frac{dx}{dv} = \frac{d\delta x}{dv}, \quad \delta \frac{dy}{dv} = \frac{d\delta y}{dv};$$

и какъ

$$\delta \left(\frac{dx}{du} \frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv} \frac{dy}{du} \right) = \frac{dx}{du} \frac{d\delta y}{dv} - \frac{dx}{dv} \frac{d\delta y}{du} + \frac{dy}{dv} \frac{d\delta x}{du} - \frac{dy}{du} \frac{d\delta x}{dv}$$

и въ тоже время

$$\frac{d\delta y}{dv} = \frac{d\delta y}{dx} \frac{dx}{dv} + \frac{d\delta y}{dy} \frac{dy}{dv}$$

$$\frac{d\delta y}{du} = \frac{d\delta y}{dx} \frac{dx}{du} + \frac{d\delta y}{dy} \frac{dy}{du}$$

$$\frac{d\delta x}{du} = \frac{d\delta x}{dx} \frac{dx}{du} + \frac{d\delta x}{dy} \frac{dy}{du}$$

$$\frac{d\delta x}{dv} = \frac{d\delta x}{dx} \frac{dx}{dv} + \frac{d\delta x}{dy} \frac{dy}{dv},$$

то будетъ

$$\frac{dx}{du} \frac{d\delta y}{dv} - \frac{dx}{dv} \frac{d\delta y}{du} = \left(\frac{dx}{du} \frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv} \frac{dy}{du} \right) \frac{d\delta y}{dy}$$

$$\frac{dy}{dv} \frac{d\delta x}{du} - \frac{dy}{du} \frac{d\delta x}{dv} = \left(\frac{dx}{du} \frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv} \frac{dy}{du} \right) \frac{d\delta x}{dx}$$

По вставленіи этихъ значеній получимъ

$$\delta W = \iint \left(\delta U + U \frac{d\delta x}{dx} + U \frac{d\delta y}{dy} \right) \left(\frac{dx}{du} \frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv} \frac{dy}{du} \right) du dv,$$

или возвращаясь къ первоначальнымъ переменнымъ x, y ,

$$\delta W = \iint \left(\delta U + U \frac{d\delta x}{dx} + U \frac{d\delta y}{dy} \right) dx dy$$

Наконецъ мы знаемъ, что

$$\left(\frac{d\delta x}{dx} + \frac{d\delta y}{dy} \right) dx dy = \delta (dx dy)$$

слѣдовательно будетъ

$$\delta \cdot \iint U dx dy = \iint \delta (U dx dy).$$

Теперь развитіе вариціона δW дѣлается очень просто. Если полный дифференціалъ функціи U напомнимъ

$$dU = Ldx + Mdy + Ndz \\ + Pd z' + Qdz_1 + Rdz'' + Sdz'_1 + Tdz_{11} \dots,$$

то есть означимъ чрезъ L, M, N, P и проч. частныя производныя по x, y, z, z', z_1 и пр. и чрезъ $z', z_1, z'', z'_1, z_{11}$ и пр. означимъ по Лагранжу частныя производныя $\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}, \frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^2z}{dx dy}$ и пр.; то будетъ

$$\delta U = L\delta x + M\delta y + N\delta z \\ + P\delta z' + Q\delta z_1 + R\delta z'' + S\delta z'_1 + T\delta z_{11} + \dots$$

Мы уже объяснили происхожденіе количества δz , то есть

$$\delta z = z'\delta x + z_1\delta y + \omega.$$

Значеніе количествъ $\delta z', \delta z_1$ и пр. находимъ слѣдующимъ образомъ. Пусть $z = f(x, y)$, будетъ

$$z' = \frac{dz}{dx} = f'_x(x, y)$$

$$\delta z' = z''\delta x + z'_1\delta y + \delta. f'_x(x, y)$$

и какъ

$$\delta. f'_x(x, y) = \frac{\delta f(x + dx, y) - \delta f(x, y)}{dx} = \frac{\omega(x + dx, y) - \omega(x, y)}{dx} \\ = \frac{d\omega(x, y)}{dx} = \omega'_x(x, y) = \omega',$$

то получимъ

$$\delta z' = z''\delta x + z'_1\delta y + \omega';$$

Подобнымъ образомъ найдемъ

$$\delta z_1 = z'_1\delta x + z_{11}\delta y + \omega_1$$

и вообще

$$\delta z_{(n)}^{(m)} = z_{(n)}^{(m+1)}\delta x + z_{(n+1)}^{(m)}\delta y + \omega_{(n)}^{(m)}$$

Если вставимъ эти значенія въ выраженія δU и положимъ еще

$$\delta U = (L + z'N + z''P + z'_1Q + z_{11}R + z''_1S + z_{111}T \dots)\delta x \\ + (M + z_1N + z'_1P + z_{11}Q + z'_{11}R + z_{111}S + z_{1111}T \dots)\delta y \\ + \omega N + \omega'P + \omega''R + \omega'_1S + \omega_{11}T \dots$$

то будетъ

$$\delta U = U'\delta x + U_1\delta y + \omega N + \omega'P + \omega_1Q \\ + \omega''R + \omega'_1S + \omega_{11}T + \dots$$

Теперь возвращаясь къ выраженію δW и замѣчая, что

$$U' \delta x + U \frac{d\delta x}{dx} = \frac{d(U\delta x)}{dx}$$

$$U_i \delta y + U \frac{d\delta y}{dy} = \frac{d(U\delta y)}{dy},$$

получимъ

$$\delta W = (\int U \delta x dy) + (\int U \delta y dx) + \int \int (\omega N + \omega' P + \omega'' R + \dots) dx dy$$

Интегралы заключенные въ скобки представляютъ разность двухъ значеній, которыя получаетъ выраженіе ихъ при данныхъ границахъ интегрированія. Эти границы могутъ быть постоянными или данными посредствомъ уравненій между x и y .

Теперь можно подъ знакомъ двойнаго интеграла всѣ неопредѣленные функции привести къ одной ω . Это приведеніе совершается посредствомъ интегрированія по частямъ. Такимъ образомъ получимъ

$$\int \int P \omega' dx dy = (\int P \omega dy) - \int \int \frac{dP}{dx} \omega dx dy,$$

$$\int \int Q \omega_1 dx dy = (\int Q \omega dx) - \int \int \frac{dQ}{dy} \omega dx dy,$$

$$\int \int R \omega'' dx dy = (\int R \omega' dy) - \left(\int \frac{dR}{dx} \omega dy \right) + \int \int \frac{d^2 R}{dx^2} \omega dx dy,$$

$$\int \int T \omega_{11} dx dy = (\int T \omega_1 dx) - \left(\int \frac{dT}{dy} \omega dx \right) + \int \int \frac{d^2 T}{dy^2} \omega dx dy$$

Выраженіе слѣдующаго двойнаго интеграла зависитъ отъ порядка интегрированія въ отношеніи переменныхъ x и y , такъ что начиная интегрированіе по y будетъ

$$\int \int S \omega' dx dy = (\int S \omega' dx) - \left(\int \frac{dS}{dy} \omega dy \right) + \int \int \frac{d^2 S}{dx dy} \omega dx dy,$$

слѣдуя обратному порядку получимъ

$$\int \int S \omega'_1 dx dy = (\int S \omega_1 dy) - \left(\int \frac{dS}{dx} \omega dx \right) + \int \int \frac{d^2 S}{dx dy} \omega dx dy,$$

и слѣдовательно, взявъ для симетріи полусумму выраженій, получимъ

$$\begin{aligned} \int \int S \omega' dx dy &= \frac{1}{2} (\int S \omega' dx) + \frac{1}{2} (\int S \omega_1 dy) - \frac{1}{2} \left(\int \frac{dS}{dy} \omega dy \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\int \frac{dS}{dx} \omega dx \right) + \int \int \frac{d^2 S}{dx dy} \omega dx dy \end{aligned}$$

Если разовьемъ подобнымъ образомъ все прочіе члены въ выраженіи δW и вставимъ ихъ значеніе, то окончательная формула будетъ

$$\delta \iint U dx dy = \Omega + \iint H \omega dx dy,$$

гдѣ для сокращенія полагаемъ

$$H = N - \frac{dP}{dx} - \frac{dQ}{dy} + \frac{d^2 R}{dx^2} - \frac{d^2 S}{dx dy} + \frac{d^2 T}{dy^2} + \text{пр.}$$

$$\begin{aligned} \Omega = & (\int U \delta x dy) + (\int U \delta y dx) \\ & + (\int P \omega dy) + (\int Q \omega dx) \\ & - \left(\int \frac{dR}{dx} \omega dy + \frac{1}{2} \int \frac{dS}{dy} \omega dy + \frac{1}{2} \int \frac{dS}{dx} \omega dx + \int \frac{dT}{dy} \omega dx \right) + \text{пр.} \\ & + (\int R \omega' dy) + \frac{1}{2} (\int S \omega' dx) + \text{пр.} \\ & + (\int T \omega_1 dx) + \frac{1}{2} (\int \omega_1 dy) + \text{пр.} \dots \end{aligned}$$

Формулы были бы удобнѣе, если бы члены входящіе въ составъ функции Ω зависѣли отъ однихъ и тѣхъ же переменныхъ. Въ настоящемъ случаѣ, то есть для двойныхъ интеграловъ, не только возможно желаемое преобразование, но даже имѣетъ геометрическое основаніе. Для точнаго изложенія способа достаточно рассмотреть тотъ простой случай, когда границы интеграла W даются однимъ уравненіемъ $A = 0$. Положимъ, что это уравненіе даетъ для каждаго значенія x два различныхъ между собою и дѣйствительныхъ значенія для y . Если будемъ разсматривать переменное x какъ абсциссу и y какъ прямоугольную ординату, то получимъ на плоскости координатъ xu замкнутую кривую линію, на примѣръ $MmNn$. Пусть абсциссы x соотвѣтствуютъ двѣ точки m и n , ихъ ординаты будутъ большій и меньшій корни уравненія $A = 0$. Въ точкахъ M и N , соотвѣтствующихъ самой меньшей и самой большей абсциссамъ, двѣ ординаты дѣлаются равными и касательныя перпендикулярны къ оси абсциссъ. Кривая раздѣляется въ точкахъ M и N на двѣ части, MmN и NnM , которыя мы означимъ для сокращенія (m) и (n) . Внешняя часть нормальной линіи проведенной чрезъ каждую точку дуги (m) образуетъ острый уголъ съ продолженіемъ ординаты y ; напротивъ того, этотъ уголъ бываетъ тупымъ для всякой точки на дугѣ (n) . Длину дуги s можно считать отъ точки M_0 произвольно взятой на кривой $MmNn$, такъ чтобы переменное s непрерывно увеличивалось отъ $s = 0$ до $s = l$, означая чрезъ l всю замкнутую ду-

гу $M_0 N M M_0$. Теперь преобразование формулы Ω дѣлается слѣдующимъ образомъ: изъ уравненій $A = 0$, $dx^2 + dy^2 = ds^2$ должно найти выраженія для x и y въ функціяхъ отъ s , затѣмъ можно будетъ всякую данную функцію отъ x, y разсматривать извѣстною функціею отъ s , таковы напримѣръ функціи $\delta x, \delta y, \omega, \omega', \omega$, и пр. Означая чрезъ $\pi - \alpha$ и β углы внѣшней части нормала съ продолженіемъ координатъ x и y , имѣемъ

$$dx = \cos \beta. ds, \quad dy = \cos \alpha. ds.$$

Для всѣхъ точекъ на дугѣ (m) значеніе $\cos \beta$ положительно, для точекъ же на дугѣ (n) отрицательно. Съ другой стороны, разность двухъ интеграловъ составляющая выраженіе $(\int U \delta y dx)$ можетъ быть разсматриваема какъ сумма, если въ отрицательныхъ членахъ употребимъ $-dx$ вмѣсто dx ; слѣдовательно будетъ

$$(\int U \delta y dx) = \int_0^l U \cos \beta. \delta y ds$$

Подобнымъ образомъ находимъ

$$(\int U \delta x dy) = \int_0^l U \cos \alpha. \delta x ds$$

По вставленіи этихъ значеній выраженіе для Ω будетъ

$$\begin{aligned} \Omega = & \int_0^l U (\cos \alpha. \delta x + \cos \beta. \delta y) ds + \int_0^l (P \cos \alpha + Q \cos \beta) \omega ds \\ & - \int_0^l \left(\frac{dR}{dx} \cos \alpha + \frac{1}{2} \frac{dS}{dy} \cos \alpha + \frac{1}{2} \frac{dS}{dx} \cos \beta + \frac{dT}{dy} \cos \beta \right) \omega ds \\ & + \int_0^l (R \cos \alpha + \frac{1}{2} S \cos \beta + \dots) \omega' ds \\ & + \int_0^l (T \cos \beta + \frac{1}{2} S \cos \alpha + \dots) \omega ds + np. \end{aligned}$$

Изложенный способъ варіированія въ двойныхъ интегралахъ принадлежитъ Пуассону, и составляетъ важное мѣсто въ исторіи математическаго анализа.

О ВАРИИРОВАНИИ ОПРЕДЕЛЕННЫХЪ ИНТЕГРАЛОВЪ

СО МНОГИМИ ПЕРЕМѢННЫМИ.

§ XV.

Предъидущій способъ можно представить въ видѣ болѣе общемъ. Пусть U означаетъ данную функцію многихъ независимыхъ переменныхъ $x, y, z \dots s$ и количествъ $u, v, w \dots$ рассматриваемыхъ функціями тѣхъ же переменныхъ; на примѣръ

$$U = f(x, y, z \dots s; u, v, w \dots)$$

Границы интеграла

$$W = \iiint \dots U dx dy dz \dots ds$$

можно предполагать данными для каждаго независимаго переменнаго, или посредствомъ уравненія

$$\chi(x, y, z \dots s) = 0$$

Въ послѣднемъ случаѣ интегрированіе должно распространить на всѣ значенія $x, y, z \dots s$ удовлетворяющія условію

$$\chi(x, y, z \dots s) < 0$$

На примѣръ, если производимъ интегрированіе въ слѣдующемъ порядкѣ

$$W = \int_{s_0}^S ds \dots \int_{x_0}^X dx \int_{y_0}^Y dy \int_{z_0}^Z dz,$$

то количества z_0, Z будутъ два корня z уравненія $\chi = 0$, и слѣдовательно нѣкоторыя функціи переменныхъ $y, x \dots s$; y_0 и Y представляютъ самое меньшее и самое большее значенія y , и потому опредѣляются изъ совокупныхъ уравненій $\chi = 0, \frac{d\chi}{dz} = 0$;

подобнымъ образомъ x_0 и X представляютъ самое меньшее и самое большее значеніе x и потому опредѣляются изъ уравненій $\chi = 0, \frac{d\chi}{dz} = 0, \frac{d\chi}{dy} = 0$ и такъ далѣе.

Положимъ теперь, что переменныя $x, y, z \dots s$ получаютъ вариационныя приращенія $\delta x, \delta y, \delta z \dots \delta s$; каждое изъ нихъ должно рассматривать произвольною функцію всѣхъ переменныхъ $x, y, z \dots s$. Чтобы сдѣлать это яснымъ, стоитъ замѣнить переменныя $x, y, z \dots$ новыми $p, q, r \dots$ пользуясь для сего какими нибудь уравненіями

$$x = \psi_1(p, q, r \dots), y = \psi_2(p, q, r \dots), z = \psi_3(p, q, r \dots)$$

въ слѣдствіе чего количества $\delta x, \delta y, \delta z \dots$ будутъ произвольными функціями новыхъ переменныхъ $p, q, r \dots$, а по исключеніи ихъ получаются произвольныя функціи начальныхъ переменныхъ $x, y, z \dots s$. Приращенія количествъ $u, v, w \dots$ состояются изъ собственныхъ варіаціоновъ $\bar{\delta}u, \bar{\delta}v, \bar{\delta}w \dots$ какъ произвольныхъ функцій отъ $x, y, z \dots s$, и приданныхъ варіаціоновъ раждающихся въ слѣдствіе приращенія переменныхъ $x, y, z \dots s$. Такъ будетъ

$$\delta u = \bar{\delta}u + \frac{du}{dx} \delta x + \frac{du}{dy} \delta y + \frac{du}{dz} \delta z + \dots$$

$$\delta v = \bar{\delta}v + \frac{dv}{dx} \delta x + \frac{dv}{dy} \delta y + \frac{dv}{dz} \delta z + \dots \text{ и пр.}$$

Въ слѣдствіе того приращеніе функціи U будетъ

$$\begin{aligned} \delta U = & \left(\frac{dU}{dx} \right) \delta x + \left(\frac{dU}{dy} \right) \delta y + \left(\frac{dU}{dz} \right) \delta z + \dots \\ & + \left(\frac{dU}{du} \right) \delta u + \left(\frac{dU}{dv} \right) \delta v + \left(\frac{dU}{dw} \right) \delta w + \dots \end{aligned}$$

Мы пишемъ здѣсь частныя производныя функціи U въ скобкахъ, потому что сей-часъ будемъ имѣть надобность въ означеніи другихъ подобныхъ количествъ.

Послѣднее уравненіе, по вставленіи значеній $\delta u, \delta v \dots$ и замѣчая что

$$\left(\frac{dU}{dx} \right) + \left(\frac{dU}{du} \right) \frac{du}{dx} + \left(\frac{dU}{dv} \right) \frac{dv}{dx} + \left(\frac{dU}{dw} \right) \frac{dw}{dx} + \dots = \frac{dU}{dx}$$

$$\left(\frac{dU}{dy} \right) + \left(\frac{dU}{du} \right) \frac{du}{dy} + \left(\frac{dU}{dv} \right) \frac{dv}{dy} + \left(\frac{dU}{dw} \right) \frac{dw}{dy} + \dots = \frac{dU}{dy}, \text{ и пр.}$$

даетъ

$$\delta U = \omega + \frac{dU}{dx} \delta x + \frac{dU}{dy} \delta y + \frac{dU}{dz} \delta z + \dots$$

гдѣ означаемъ для сокращенія

$$\omega = \left(\frac{dU}{du} \right) \bar{\delta}u + \left(\frac{dU}{dv} \right) \bar{\delta}v + \left(\frac{dU}{dw} \right) \bar{\delta}w + \dots$$

Теперь намъ слѣдовало бы, подражая способу Пуассона доказать уравненіе

$$\delta \cdot \iiint \dots U dx dy dz \dots ds = \iiint \dots \delta (U dx dy \dots ds),$$

что и не представляет особенной трудности, если пользуемся общими формулами для преобразования кратных интеграловъ, но мы примемъ здѣсь въ помощь другое начало теоріи бесконечно малыхъ, а именно: все варіаціонное приращеніе интеграла W равно суммѣ бесконечно малыхъ частныхъ приращеній, происходящихъ отъ измѣненія функціи U безъ перемѣны въ $(dx dy dz \dots ds)$, и отъ измѣненій въ $dx, dy, \dots ds$ безъ приращенія въ U . Члены отъ измѣненія въ границахъ представляются здѣсь какъ бесконечно малыя втораго порядка, а слѣдовательно будетъ

$$\delta W = \iiint \dots \left(\delta U + \frac{\delta (dx dy \dots ds)}{dx dy \dots ds} U \right) dx dy \dots ds$$

и какъ

$$\delta dx = \left(\frac{d(x + \delta x) - dx}{dx} \right) dx = \frac{d\delta x}{dx} dx$$

$$\delta dy = \left(\frac{d(y + \delta y) - dy}{dy} \right) dy = \frac{d\delta y}{dy} dy \text{ и пр.}$$

то будетъ

$$\delta W = \iiint \dots \left(\delta U + U \frac{d\delta x}{dx} + U \frac{d\delta y}{dy} + \dots U \frac{d\delta s}{ds} \right) dx dy \dots ds$$

Если вставимъ сюда общее значеніе δU , то получимъ еще

$$\delta W = \iiint \dots \left(\frac{d \cdot U \delta x}{dx} + \frac{d \cdot U \delta y}{dy} + \frac{d \cdot U \delta z}{dz} \dots \right) dx dy dz \dots$$

$$+ \iiint \dots \left(\frac{dU}{du} \delta u + \frac{dU}{dv} \delta v + \frac{dU}{dw} \delta w \dots \right) dx dy dz \dots$$

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВЪ

ПО ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПОСТОЯННОЙ.

§ XVI.

Пусть $f(x, t)$ означаетъ функцію независимаго переменнаго x и произвольной постоянной t . Значеніе интеграла $\int_{x_1}^{x_2} f(x, t) dx$ будетъ вообще функція отъ t ; если границы интегрированія x_1 и x_2 предполагаются также функціями t , то дифференціальное измѣненіе интеграла въ слѣдствіе приращенія dt будетъ

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} f(x, t) dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{df(x, t)}{dt} dx + \frac{dx_2}{dt} f(x_2, t) - \frac{dx_1}{dt} f(x_1, t)$$

Эту формулу можно обобщить для двойныхъ и вообще для кратныхъ интеграловъ, но для этого необходимо пользоваться особымъ знакомъ вычисленія, который Г. Сарюсъ называетъ знакомъ подстановленія и пишетъ

$$\gamma^x f(x, t) = f(y, t).$$

Полагая для краткости $f(x, t) = U$, получимъ

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} U dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dU}{dt} dx + \frac{dx_2}{dt} \gamma^{x_2} U - \frac{dx_1}{dt} \gamma^{x_1} U \quad (1)$$

Положимъ теперь, что функція U сама представляетъ опредѣленный интегралъ по новому переменному y , для котораго границы интегрированія y_1 и y_2 разсматриваются данными функціями

отъ x , напримѣръ $U = \int_{y_1}^{y_2} V dy$.

Подобно уравненію (1) получимъ

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} V dy dx = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{dV}{dt} dy dx + \frac{dy_2}{dt} \gamma^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} V dx - \frac{dy_1}{dt} \gamma^{y_1} \int_{x_1}^{x_2} V dx$$

и если вставимъ эти значенія въ уравненіе (1), то получимъ

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iint V dx dy = \iint \frac{dV}{dt} dx dy + \int dx \frac{dy_{\alpha}}{dt} \gamma^{\alpha}_{\gamma} V - \int dx \frac{dy_{\beta}}{dt} \gamma^{\beta}_{\gamma} V \\ + \frac{dx_{\alpha}}{dt} \gamma^{\alpha}_{\omega} \int V dy - \frac{dx_{\beta}}{dt} \gamma^{\beta}_{\omega} \int V dy \end{aligned}$$

Границы интегрированія подразумѣваются x_{α} и x_{β} для x , также y_{α} и y_{β} для y . Но количества x_{α} и x_{β} зависятъ только отъ t и не содержать ни x , ни y ; слѣдовательно будетъ

$$\frac{dx_{\alpha}}{dt} \gamma^{\alpha}_{\omega} \int V dy = \gamma^{\alpha}_{\omega} \frac{dx_{\alpha}}{dt} \int V dy = \gamma^{\alpha}_{\omega} \int V \frac{dx_{\alpha}}{dt} dy;$$

количества y_{α} , y_{β} зависятъ отъ t и x , но не содержать самого y , слѣдовательно

$$\int dx \frac{dy_{\alpha}}{dt} \gamma^{\alpha}_{\gamma} V = \int dx \gamma^{\alpha}_{\gamma} V \frac{dy_{\alpha}}{dt}.$$

И такъ будетъ

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iint V dx dy = \iint \frac{dV}{dt} dx dy + \int dx \gamma^{\alpha}_{\gamma} V \frac{dy_{\alpha}}{dt} - \int dx \gamma^{\beta}_{\gamma} V \frac{dy_{\beta}}{dt} \\ + \gamma^{\alpha}_{\omega} \int V \frac{dx_{\alpha}}{dt} dy - \gamma^{\beta}_{\omega} \int V \frac{dx_{\beta}}{dt} dy \quad (2) \end{aligned}$$

Пусть теперь U представляетъ функцію независимыхъ переменныхъ x, y, z и произвольнаго постояннаго t . Определенный интегралъ

$\iiint U dx dy dz$ предполагаетъ даннымъ уравненіе между x, y, z ,

изъ котораго получаютъ значенія z при границахъ интегрированія, z_{α} и z_{β} , въ функціяхъ отъ x, y ; затѣмъ значенія при границахъ y , то есть y_{α} и y_{β} , будутъ функціи отъ x ; наконецъ значенія при границахъ x , то есть x_{α} и x_{β} , постоянны или вообще функціи произвольной постоянной t . Такимъ образомъ количества x_{α} и x_{β} зависятъ только отъ t , количества y_{α} и y_{β} содержатъ только t и x , наконецъ количества z_{α} и z_{β} содержатъ t, x и y . Если вставимъ въ уравненіе (2) $\int U dz$ намѣсто V , то получимъ

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint U dx dy dz &= \iiint \frac{dU}{dt} dx dy dz \\ &+ \iint dx dy \gamma_z^{x''} U \frac{dz''}{dt} - \iint dx dy \gamma_z^{x'} U \frac{dz'}{dt} \\ &+ \int dx \gamma_y^{x''} \int U \frac{dy''}{dt} dz - \int dx \gamma_y^{x'} \int U \frac{dy'}{dt} dz \\ &+ \gamma_x^{x''} \iint U \frac{dx''}{dt} dy dz - \gamma_x^{x'} \iint U \frac{dx'}{dt} dy dz \quad (3) \end{aligned}$$

По этой формулѣ не трудно написать значеніе

$$\frac{d}{dt} \iiint \dots U dx dy dz \dots ds$$

для какого угодно числа независимыхъ переменныхъ $x, y, z \dots s$.

Теорема Сарюса. Чтобы составить общее выраженіе варіаціона для опредѣленнаго интеграла

$$W = \iiint \dots f(x, y, z \dots s; u, v, w \dots) dx dy dz \dots ds,$$

мы приписывали варіаціонныя приращенія не только функціямъ u, v, w , но и всѣмъ независимымъ переменнымъ $x, y, z \dots s$, причемъ число элементовъ въ интегралѣ неизмѣнялось, то есть никакихъ членовъ собственно отъ измѣненія границъ интегрированія не происходило. Въ сущности дѣла, границы интегрированія измѣняются, только не явно, а въ слѣдствіе приращенія количествъ $dx, dy \dots ds$; слѣдовательно выраженіе δW можно получить еще другимъ образомъ, то есть оставляя $dx, dy \dots ds$ постоянными и предполагая приращеніе въ самыхъ границахъ интегрированія.

Въ самомъ дѣлѣ, если будемъ разсматривать $x, y, \dots s$ какъ функціи произвольнаго постояннаго t , то приращеніе $\frac{dW}{dt} dt$ будетъ содержать всѣ члены составляющіе полный варіаціонъ δW . Такое сравненіе двухъ способовъ привело Сарюса къ слѣдующей теоремѣ:

$$\delta \cdot \iiint U dx dy dz = \frac{d}{dt} \iiint U dx dy dz \cdot dt$$

Мы пишемъ только три переменныхъ, потому что большее число ихъ не представляетъ въ формулахъ ничего новаго. Чтобы доказать эту теорему, интегрируемъ уравненіе (2) въ отношеніи t , между границами t_1 и t_2 , получимъ

$$\begin{aligned} \iiint \frac{dV}{dt} dx dy dt &= \gamma_t'' \iint V dx dy - \gamma_t' \iint V dx dy \\ &\quad - \iint dt dx \gamma_y'' V \frac{dy''}{dt} + \iint dt dx \gamma_y' V \frac{dy'}{dt} \\ &\quad - \int dt \gamma_x'' \int V \frac{dx''}{dt} dy + \int dt \gamma_x' \int V \frac{dx'}{dt} dy \quad (4) \end{aligned}$$

Если въ уравненіе (4) поставимъ x, y, z намѣсто t, x, y и также $U\delta x$ на мѣсто V , то получимъ

$$\begin{aligned} \iiint \frac{d. U\delta x}{dx} dx dy dz &= \gamma_x'' \iint U\delta x dy dz - \gamma_x' \iint U\delta x dy dz \\ &\quad - \int dx \gamma_y'' \int U\delta x \frac{dy''}{dx} dz + \int dx \gamma_y' \int U\delta x \frac{dy'}{dx} dz \\ &\quad - \iint dx dy \gamma_z'' U\delta x \frac{dz''}{dx} + \iint dx dy \gamma_z' U\delta x \frac{dz'}{dx} \quad (5) \end{aligned}$$

Интегрируемъ также уравненіе (1) въ отношеніи t , между границами t_1 и t_2 , будетъ

$$\begin{aligned} \iint \frac{dU}{dt} dt dx &= \gamma_t'' \int U dx - \gamma_t' \int U dx \\ &\quad - \int dt \gamma_x'' U \frac{dx''}{dt} + \int dt \gamma_x' U \frac{dx'}{dt} \end{aligned}$$

и если поставимъ здѣсь y, z намѣсто t, x и $U\delta y$ намѣсто U , то получимъ

$$\begin{aligned} \iint \frac{d. U\delta y}{dy} dy dz &= \gamma_y'' \int U\delta y dz - \gamma_y' \int U\delta y dz \\ &\quad - \int dy \gamma_z'' U\delta y \frac{dz''}{dy} + \int dy \gamma_z' U\delta y \frac{dz'}{dy} \quad (6) \end{aligned}$$

Наконецъ непосредственно имѣемъ

$$\int \frac{d. U\delta z}{dz} dz = \gamma_z'' U\delta z - \gamma_z' U\delta z \quad (7)$$

Въ уравненіи (6), въ тѣхъ членахъ гдѣ требуется подстановленіе y_2 или y_1 намѣсто y , можно писать δy_2 или δy_1 намѣсто δy , потому что интегрированіе по z не касается переменной y . Замѣтивъ это, если складываемъ уравненія (5), (6), (7), по интегрированіи урав-

ненія (6) въ отношеніи x , и уравненія (7) въ отношеніи x и y , то получимъ во второй части

$$\begin{aligned} & \gamma_{x''}^x \iint U \delta x. dy dz - \gamma_{x'}^x \iint U \delta x. dy dz \\ & + \int dx \gamma_{y''}^y \int U \left(\delta y_{y''} - \frac{dy_{y''}}{dx} \delta x \right) dz - \int dx \gamma_{y'}^y \int U \left(\delta y_{y'} - \frac{dy_{y'}}{dx} \delta x \right) dz \\ & + \iint dx dy \gamma_{z''}^z U \left(\delta z_{z''} - \frac{dz_{z''}}{dx} \delta x - \frac{dz_{z''}}{dy} \delta y \right) \\ & - \iint dx dy \gamma_{z'}^z U \left(\delta z_{z'} - \frac{dz_{z'}}{dx} \delta x - \frac{dz_{z'}}{dy} \delta y \right) \end{aligned}$$

Но количества x_1 и $x_{y'}$ не зависятъ отъ x, y, z ; y_1 и $y_{y'}$ суть функціи отъ x ; z_1 и $z_{y'}$ функціи отъ x и y ; слѣдовательно

$$\delta x_1 = \overline{\delta x_1}$$

$$\delta y_1 = \overline{\delta y_1} + \frac{dy_1}{dx} \delta x$$

$$\delta z_1 = \overline{\delta z_1} + \frac{dz_1}{dx} \delta x + \frac{dz_1}{dy} \delta y;$$

$$\delta x_{y'} = \overline{\delta x_{y'}}$$

$$\delta y_{y'} = \overline{\delta y_{y'}} + \frac{dy_{y'}}{dx} \delta x$$

$$\delta z_{y'} = \overline{\delta z_{y'}} + \frac{dz_{y'}}{dx} \delta x + \frac{dz_{y'}}{dy} \delta y$$

Если вставимъ эти значенія въ предыдущую сумму, опустивъ черты надъ δy и δz , то для независимыхъ переменныхъ x, y, z получимъ

$$\iiint \left(\frac{d. U \delta x}{dx} + \frac{d. U \delta y}{dy} + \frac{d. U \delta z}{dz} \right) dx dy dz$$

$$= \gamma_{x''}^x \iint U \delta x. dy dz - \gamma_{x'}^x \iint U \delta x. dy dz$$

$$+ \int dx \gamma_{y''}^y \int U \delta y. dz - \int dx \gamma_{y'}^y \int U \delta y. dz$$

$$+ \iint dx dy \gamma_{z''}^z U \delta z - \iint dx dy \gamma_{z'}^z U \delta z$$

Теперь выраженіе вариціона δW будетъ

$$\begin{aligned} \delta. \iiint U dy dx dz = & \iiint \left(\frac{dU}{du} \overline{\delta u} + \frac{dU}{dv} \overline{\delta v} + \dots \right) dx dy dz \\ & + \gamma_{x..}^x \iint U \delta x. dy dz - \gamma_{..x}^x \iint U \delta x. dy dz \\ & + \int dx. \gamma_{y..}^y \int U \delta y. dz - \int dx. \gamma_{..y}^y \int U \delta y. dz \\ & + \iint dx dy. \gamma_{z..}^z U \delta z - \iint dx dy. \gamma_{..z}^z U \delta z \quad (7) \end{aligned}$$

Чтобы сдѣлать это уравненіе тождественнымъ съ уравненіемъ (3), стоитъ только умножить послѣднее изъ нихъ на произвольное безконечно малое количество dt и полагать

$$\begin{aligned} dt. \frac{dU}{dt} &= \frac{dU}{du} \overline{\delta u} + \frac{dU}{dv} \overline{\delta v} + \frac{dU}{dw} \overline{\delta w} + \dots \\ \frac{dx}{dt} dt &= \delta x, \quad \frac{dy}{dt} dt = \delta y, \quad \frac{dz}{dt} dt = \delta z, \end{aligned}$$

что ни сколько не противорѣчитъ опредѣленію функцій называемыхъ вариціонами.

Приведеніе въ общемъ членъ. Общій членъ въ уравненіи (7), то есть тройной интегралъ, можетъ получить приведеніе всякой разъ, когда нѣкоторыя изъ функцій $u, v, \dots$ будутъ частными производными. Напримѣръ, если $v = \frac{du}{dx}$, то по свойству собственнаго вариціона будетъ

$$\overline{\delta v} = \overline{\delta} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{d. \overline{\delta u}}{dx}$$

затѣмъ интегрированіе по частямъ даетъ

$$\int \frac{dU}{dv} \overline{\delta v}. dx = \left(\frac{dU}{dv} \overline{\delta u} \right) - \int \frac{d \left(\frac{dU}{dv} \right)}{dx} \overline{\delta u}$$

Подобное приведеніе можно употребить для всѣхъ членовъ, въ которыхъ входятъ производныя по x, y, z отъ функцій $\overline{\delta u}$. Мы

развили этотъ способъ для двойныхъ интеграловъ, гдѣ онъ имѣетъ геометрическое значеніе; для интеграла же со многими переменными должно предпочесть способъ основанный на новыхъ формулахъ, каковы (5) и (6). Вообще члены въ уравненіи (7) требующія приведенія можно представить подъ видомъ

$$\iiint R \frac{d^{l+m+n} \bar{\delta} u}{dx^l dy^m dz^n} dx dy dz$$

гдѣ коэффициентъ R есть извѣстная функція отъ x, y, z, u, v, w . Простѣйшій случай будетъ приведеніе интеграла

$$\iiint R \frac{d \bar{\delta} u}{dx} dx dy dz, \text{ который для сокращенія означимъ чрезъ } X.$$

Замѣчая что

$$R \frac{d \bar{\delta} u}{dx} = \frac{d (R \bar{\delta} u)}{dx} - \frac{dR}{dx} \bar{\delta} u,$$

сначала получимъ

$$X = \iiint \frac{d (R \bar{\delta} u)}{dx} dx dy dz - \iiint \frac{dR}{dx} \bar{\delta} u dx dy dz$$

Но если въ уравненіи (5) поставимъ $R \bar{\delta} u$ на мѣсто $U \delta x$, то получимъ значеніе интеграла $\iiint \frac{d (R \bar{\delta} u)}{dx} dx dy dz$, затѣмъ выраженіе количества X будетъ

$$\begin{aligned} X = & \int_{\omega}^{\omega''} \iint R \bar{\delta} u. dy dz - \int_{\omega}^{\omega'} \iint R \bar{\delta} u. dy dz - \iiint \frac{dR}{dx} \bar{\delta} u. dx dy dz \\ & - \int dx. \int_y^{y''} \int R \bar{\delta} u \frac{dy''}{dx} dz + \int dx. \int_y^{y'} \int R \bar{\delta} u \frac{dy'}{dx} dz \\ & - \iint dx dy. \int_z^{z''} R \bar{\delta} u \frac{dz''}{dx} + \iint dx dy. \int_z^{z'} R \bar{\delta} u \frac{dz'}{dx} \end{aligned} \quad (8)$$

Теперь представляется членъ

$$\iiint R \frac{d \bar{\delta} u}{dy} dx dy dz.$$

Замѣчая что

$$R \frac{d\bar{\delta}u}{dy} = \frac{d(R\bar{\delta}u)}{dy} - \frac{dR}{dy} \bar{\delta}u,$$

и полагая $\iint R \frac{d\bar{\delta}u}{dy} dy dz = Y$, сначала получимъ

$$Y = \iint \frac{d(R\bar{\delta}u)}{dy} dy dz - \iint \frac{dR}{dy} \bar{\delta}u. dy dz$$

Если же въ уравненіи (6) поставимъ $R\bar{\delta}u$ на мѣсто $U\delta y$, то получимъ значеніе интеграла $\iint \frac{d(R\bar{\delta}u)}{dy} dy dz$, затѣмъ будетъ

$$\begin{aligned} Y &= \gamma_y^{y''} \int R\bar{\delta}u dz - \gamma_y^{y'} \int R\bar{\delta}u dz - \iint \frac{dR}{dy} \bar{\delta}u. dy dz \\ &\quad - \int dy. \gamma_x^{z''} R\bar{\delta}u \frac{dz}{dy} + \int dy. \gamma_x^{z'} R\bar{\delta}u \frac{dz}{dy} \end{aligned}$$

и если интегрируемъ это уравненіе въ отношеніи x , между границами x_1 и x_n , то получимъ

$$\begin{aligned} \iiint R \frac{d\bar{\delta}u}{dy} dx dy dz &= \int dx. \gamma_y^{y''} \int R\bar{\delta}u dz - \int dx. \gamma_y^{y'} \int R\bar{\delta}u dz \\ &\quad - \iiint \frac{dR}{dy} \bar{\delta}u dx dy dz - \iint dx dy. \gamma_x^{z''} R\bar{\delta}u \frac{dz}{dy} \\ &\quad + \iint dx dy. \gamma_x^{z'} R\bar{\delta}u \frac{dz}{dy} \end{aligned} \quad (9)$$

Наконецъ изъ уравненія

$$\int_{x_1}^{x''} R \frac{d\bar{\delta}u}{dz} dz = \int_{x_1}^{x'} \frac{d(R\bar{\delta}u)}{dz} dz - \int_{x_1}^{x''} \frac{dR}{dz} \bar{\delta}u dz,$$

по вставленіи въ него формулы

$$\int_{x_1}^{x''} \frac{d(R\bar{\delta}u)}{dz} dz = \gamma_x^{z''} R\bar{\delta}u - \gamma_x^{z'} R\bar{\delta}u,$$

и по опредѣленномъ интегрированіи въ отношеніи x и y , получимъ

$$\begin{aligned} \iiint R \frac{d\delta u}{dz} dx dy dz &= \iint dx dy \cdot \gamma^z \cdot R \delta u - \iint dx dy \cdot \gamma^z \cdot R \delta u \\ &- \iiint \frac{dR}{dz} \delta u dx dy dz \end{aligned} \quad (10)$$

Подобныя формулы не трудно составить для вторыхъ производныхъ отъ δu .

§ XVII.

Задача. Составить уравненія для опредѣленія функціи φ , которая бы доставила интегралу

$$\iiint \left\{ \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy} \right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz} \right)^2 \right\} dx dy dz,$$

взятому между границами для переменныхъ x, y, z , данными уравненіемъ $f(x, y, z) = 0$, значеніе максимум или минимум.

Рѣшеніе. Если функція φ доставляетъ предложенному интегралу значеніе максимум или минимум, то вставляя на мѣсто φ другую функцію, на примѣръ $\varphi + \delta\varphi$, мы лишимъ интеграль этого значенія; а слѣдовательно по условію задачи первое варіаціонное приращеніе предложеннаго интеграла должно сдѣлать равнымъ нулю, то есть полагать $\delta W = 0$, дѣлая для сокращенія

$$W = \iiint \left\{ \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy} \right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz} \right)^2 \right\} dx dy dz.$$

Примѣняя формулу (7) къ настоящему случаю получимъ

$$\begin{aligned} \delta W &= 2 \iiint \left(\frac{d\varphi}{dx} \frac{d\delta\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy} \frac{d\delta\varphi}{dy} + \frac{d\varphi}{dz} \frac{d\delta\varphi}{dz} \right) dx dy dz \\ &+ \gamma^x \cdot \iint U \delta x \cdot dy dz - \gamma^x \cdot \iint U \delta x \cdot dy dz \end{aligned}$$

$$+ \int dx. \gamma_y^{y''} \int U \delta y_a. dz - \int dx. \gamma_y^{y'} \int U \delta y_i. dz \\ + \iint dx dy. \gamma_z^{z''} U \delta z_a - \iint dx dy. \gamma_z^{z'} U \delta z_i$$

Здѣсь по прежнему z_i и z_a представляютъ значенія при границахъ интеграла для z , y_i и y_a для y , x_i и x_a для x ; также для сокращенія полагается

$$U = \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy} \right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz} \right)^2$$

Но по предположенію нашему границы интеграла опредѣляются уравненіемъ $f = 0$ и не подлежатъ измѣненію, то есть

$$\delta x_a = 0, \delta y_a = 0, \delta z_a = 0; \delta x_i = 0, \delta y_i = 0, \delta z_i = 0;$$

слѣдовательно условіе нашей задачи приводится къ уравненію

$$\iiint \left(\frac{d\varphi}{dx} \frac{d\delta\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy} \frac{d\delta\varphi}{dy} + \frac{d\varphi}{dz} \frac{d\delta\varphi}{dz} \right) dx dy dz = 0$$

Теперь, если поставимъ въ уравненіи (8) $\frac{d\varphi}{dx}$ и φ на мѣсто R и u , то получимъ

$$\iiint \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\delta\varphi}{dx} dx dy dz = - \iiint \frac{d^2\varphi}{dx^2} \delta\varphi dx dy dz \\ + \gamma_x^{x''} \iint \frac{d\varphi}{dx} \delta\varphi dy dz - \gamma_x^{x'} \iint \frac{d\varphi}{dx} \delta\varphi dy dz \\ - \int dx. \gamma_y^{y''} \int \frac{d\varphi}{dx} \frac{dy_a}{dx} \delta\varphi dz + \int dx. \gamma_y^{y'} \int \frac{d\varphi}{dx} \frac{dy_i}{dx} \delta\varphi dz \\ - \iint dx dy. \gamma_z^{z''} \frac{d\varphi}{dx} \frac{dz_a}{dx} \delta\varphi + \iint dx dy. \gamma_z^{z'} \frac{d\varphi}{dx} \frac{dz_i}{dx} \delta\varphi$$

Подобнымъ образомъ изъ уравненій (9) и (10) находимъ

$$\iiint \frac{d\varphi}{dy} \frac{d\delta\varphi}{dy} dx dy dz = \int dx. \gamma_y^{y''} \int \frac{d\varphi}{dy} \delta\varphi dz - \int dx. \gamma_y^{y'} \int \frac{d\varphi}{dy} \delta\varphi dz \\ - \iint dx dy. \gamma_z^{z''} \frac{d\varphi}{dy} \frac{dz_a}{dy} \delta\varphi + \iint dx dy. \gamma_z^{z'} \frac{d\varphi}{dy} \frac{dz_i}{dy} \delta\varphi \\ - \iiint \frac{d^2\varphi}{dy^2} \delta\varphi dx dy dz,$$

$$\iiint \frac{d\varphi}{dz} \frac{d\overline{\delta\varphi}}{dz} dx dy dz = \iint dx dy \cdot \gamma_z'' \frac{d\varphi}{dz} \overline{\delta\varphi} - \iint dx dy \cdot \gamma_z' \frac{d\varphi}{dz} \overline{\delta\varphi} - \iiint \frac{d^2\varphi}{dz^2} \overline{\delta\varphi} dx dy dz$$

И такъ, по условію задачи получимъ

$$\begin{aligned} 0 = & \iiint \left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} \right) \overline{\delta\varphi} dx dy dz \\ & + \iint dx dy \cdot \gamma_z'' \left(\frac{d\varphi}{dx} \frac{dz_a}{dx} + \frac{d\varphi}{dy} \frac{dz_a}{dy} - \frac{d\varphi}{dz} \right) \overline{\delta\varphi} \\ & - \iint dx dy \cdot \gamma_z' \left(\frac{d\varphi}{dx} \frac{dz_1}{dx} + \frac{d\varphi}{dy} \frac{dz_1}{dy} - \frac{d\varphi}{dz} \right) \overline{\delta\varphi} \\ & + \int dx \cdot \gamma_y'' \int dz \left(\frac{d\varphi}{dx} \frac{dy_a}{dx} - \frac{d\varphi}{dy} \right) \overline{\delta\varphi} \\ & - \int dx \cdot \gamma_y' \int dz \left(\frac{d\varphi}{dx} \frac{dy_1}{dx} - \frac{d\varphi}{dy} \right) \overline{\delta\varphi} \\ & - \gamma_x'' \iint dy dz \cdot \frac{d\varphi}{dx} \overline{\delta\varphi} + \gamma_x' \iint dy dz \cdot \frac{d\varphi}{dx} \overline{\delta\varphi} \end{aligned}$$

Каждый членъ въ этомъ уравненіи, какъ опредѣленный интегралъ, содержитъ сумму функцій подобныхъ между собою; но функціи одного интеграла не имѣютъ подобія съ функціями другаго интеграла. Такимъ образомъ количество $\overline{\delta\varphi}$ въ тройномъ интегралѣ представляется произвольною функціею трехъ независимыхъ переменныхъ x, y, z ; тоже количество $\overline{\delta\varphi}$ въ двойномъ интегралѣ содержащемъ $dx dy$ представляется другою произвольною функціею переменныхъ x и y , которую получимъ вставляя вмѣсто z его значеніе z_a или z_1 ; наконецъ въ интегралахъ содержащихъ $dx dz$ и $dy dz$ количество $\overline{\delta\varphi}$ представляетъ опять другія произвольныя функціи. Чтобы привести къ нулю сумму произвольныхъ и не подобныхъ между собою функцій, должно полагать равными нулю особенно каждую функцію.

И такъ уравненія опредѣляющія функцію φ будутъ слѣдующія

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0;$$

$$\frac{d\varphi}{dx} \frac{dz_a}{dx} + \frac{d\varphi}{dy} \frac{dz_a}{dy} - \frac{d\varphi}{dz} = 0, \text{ для } z = z_a$$

и другое подобное для $z = z_1$;

$$\frac{d\varphi}{dx} \frac{dy}{dx} - \frac{d\varphi}{dy} = 0, \text{ для } y = y_a;$$

и другое подобное для $y = y_1$;

$$\frac{d\varphi}{dx} = 0, \text{ для } x = x_a$$

и другое подобное для $x = x_1$. Первое из сихъ уравненій называется *общимъ*, а прочія *условіями при границахъ*.

Если границы интеграла образуютъ одну не прерывную поверхность $f = 0$, какъ мы предположили въ нашей задачѣ, то шесть уравненій при границахъ приводятся также къ одному

$$\frac{d\varphi}{dx} \frac{dz}{dx} + \frac{d\varphi}{dy} \frac{dz}{dy} - \frac{d\varphi}{dz} = 0,$$

въ которомъ должно вставить значеніе z изъ уравненія $f = 0$.

Въ самомъ дѣлѣ, если означимъ посредствомъ скобокъ частныя производныя функціи z по x и y , то предъидущее уравненіе, по вставленіи въ него значенія $\frac{dz}{dx}$ изъ уравненія

$$dz = \left(\frac{dz}{dx}\right) dx + \left(\frac{dz}{dy}\right) dy,$$

напишется слѣдующимъ образомъ

$$\frac{d\varphi}{dx} \frac{dz}{dx} - \frac{d\varphi}{dx} \frac{dy}{dx} \left(\frac{dz}{dy}\right) + \frac{d\varphi}{dy} \left(\frac{dz}{dy}\right) - \frac{d\varphi}{dz} = 0$$

И какъ значенія $y = y_a$, $y = y_1$ предполагаютъ $\left(\frac{dy}{dz}\right) = 0$, то останется, какъ намъ и нужно,

$$\frac{d\varphi}{dx} \frac{dy}{dx} - \frac{d\varphi}{dy} = 0$$

Наконецъ, какъ значенія $x = x_a$, $x = x_1$ предполагаютъ $\frac{dx}{dy} = 0$,

то получимъ $\frac{d\varphi}{dx} = 0$.

§ XVIII.

Задача. Найти тѣло наибольшаго объема, ограниченное кривою поверхностію данной величины.

Выраженіе объема въ прямоугольныхъ координатахъ x, y, z будетъ $\iint z dx dy$, и выраженіе кривой площади

$$\iint dx dy \cdot \sqrt{1 + \frac{dz^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dy^2}};$$

границы интегрированія по переменнымъ x и y опредѣляются точками соприкосновенія къ кривой поверхности огибающаго цилиндра, у котораго ось параллельна оси координатъ z . По условію задачи должно полагать

$$\delta \cdot \iint dx dy \left\{ z - \mu \sqrt{1 + \frac{dz^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dy^2}} \right\} = 0,$$

гдѣ μ означаетъ произвольное постоянное. Если означимъ количество внутри скобки буквою K и частныя производныя $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ чрезъ z' и z'' , то общее условіе для всѣхъ точекъ будетъ

$$\frac{dK}{dz} - \frac{d\left(\frac{dK}{dz'}\right)}{dx} - \frac{d\left(\frac{dK}{dz''}\right)}{dy} = 0$$

и по вставленіи значенія K

$$\frac{d \cdot \frac{1}{v} \frac{dz}{dx}}{dx} + \frac{d \cdot \frac{1}{v} \frac{dz}{dy}}{dy} + \frac{1}{\mu} = 0,$$

$$\text{гдѣ } v^2 = 1 + \frac{dz^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dy^2};$$

наконецъ совершивъ показанныя дифференцированія получимъ

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z}{dx^2} \left[1 + \frac{dz^2}{dy^2} \right] + \frac{d^2 z}{dy^2} \left[1 + \frac{dz^2}{dx^2} \right] - 2 \frac{dz}{dx} \frac{dz}{dy} \frac{d^2 z}{dx dy} \\ + \frac{1}{\mu} \left\{ 1 + \frac{dz^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dy^2} \right\}^{\frac{3}{2}} = 0 \end{aligned}$$

Интегрирование этого уравнения въ общемъ видѣ не только затруднительно, но должно почитать не возможнымъ, потому что видъ поверхности измѣняется вмѣстѣ съ кривыми, чрезъ которыя она должна проходить по условію.

Безусловное рѣшеніе задачи получается очень просто. Очевидно, что тогда будетъ поверхность отъ обращенія, слѣдовательно полагая $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, получимъ

$$\frac{dz}{dx} = \frac{x}{r} \frac{dz}{dr}; \quad \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{x^2}{r^2} \frac{d^2z}{dr^2} + \frac{y^2}{r^3} \frac{dz}{dr}$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{y}{r} \frac{dz}{dr}, \quad \frac{d^2z}{dy^2} = \frac{y^2}{r^2} \frac{d^2z}{dr^2} + \frac{x^2}{r^3} \frac{dz}{dr}$$

$$\frac{d^2z}{dx dy} = \frac{xy}{r^2} \frac{d^2z}{dr^2} - \frac{xy}{r^3} \frac{dz}{dr}$$

и если вставимъ эти значенія въ предъидущее уравненіе, то будетъ

$$\frac{d^2z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dz}{dr} \left(1 + \frac{dz^2}{dr^2}\right) + \frac{1}{\mu} \left\{1 + \frac{dz^2}{dr^2}\right\}^{\frac{3}{2}} = 0$$

Не трудно видѣть, что первый интегралъ этого уравненія будетъ

$$\frac{r \frac{dz}{dr}}{\sqrt{1 + \frac{dz^2}{dr^2}}} = \alpha - \frac{r^2}{2\mu},$$

означая чрезъ α произвольное постоянное. Но первая часть уравненія уничтожается для $r = 0$, каково бы ни было значеніе производной $\frac{dz}{dr}$, въ чемъ не трудно убѣдиться, если представимъ это выраженіе подъ видомъ

$$\frac{r}{\sqrt{1 + \left(1 + \frac{dz^2}{dr^2}\right)}};$$

слѣдовательно, по сущности задачи, $\alpha = 0$. Затѣмъ будетъ

$$\frac{dz}{dr} = \pm \frac{r}{\sqrt{4\mu^2 - r^2}},$$

и по интегрированіи

$$(z - \beta)^2 + r^2 = 4 \mu^2$$

И такъ, меридіанъ поверхности ограничивающей наибольшей обѣ-
емъ есть кругъ, самая поверхность будетъ сфера. Постоянное 2μ
представляетъ радіусъ сферы, котораго величина находится по
данной поверхности ея, то есть по данному значенію интеграла

$$\iint dx dy. \sqrt{1 + \frac{dz^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dy^2}};$$

другое же постоянное β остается неопредѣленнымъ, что значитъ,
объемъ тѣла не зависитъ отъ положенія центра въ пространствѣ.



и не потеряем

$$(x - \lambda) + y = 0$$

Итак, меридиан поверхности ортогональной кривой γ и γ — это кривая, лежащая на поверхности γ . Поэтому γ — это кривая, лежащая на поверхности γ . Поэтому γ — это кривая, лежащая на поверхности γ .

$$\left(\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt} \right) \sqrt{1 + \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}}$$

Другие же сечения γ остаются неизменными, что означает, что γ — это кривая, лежащая на поверхности γ .

Popov, A.

Osnovaniya variacionnago isčislenija

Kasan 1856

Acad. 49 pc-1/2

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10812947-4